



Revista Internacional de Investigación e Innovación Tecnológica

Página principal: www.riit.com.mx

Diseño de un controlador mediante datos estadísticos en lazo cerrado para un servomecanismo mediante una técnica de autosintonización

Design of a closed-loop statistical data controller for a servomechanism using a self-tuning technique

Ojeda-Misses, M.A.^{1*}, Martines-Arano, H.², Sampedro-Mendoza, A.³, Franco-Árcega, A.¹,
López-Morales, V.¹

¹ Área Académica de Computación y Electrónica, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Carr. Pachuca-Tulancingo km 4.5 Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

² Escuela Superior Tepeji del Río, Ingeniería industrial, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Avenida del maestro 41, Noxtongo, 42860 Tepeji del Río de Ocampo, Hidalgo, México.

³ Área de Comunicación, Unidad Académica Profesional Huehuetoca, Universidad Autónoma del Estado de México, La Cañada, 54680 Huehuetoca, Estado de México, México.

manuel_ojeda@uaeh.edu.mx; hilario_martines@uaeh.edu.mx; asampedrom@uaemex.mx; afranco@uaeh.edu.mx; virgilio@uaeh.edu.mx

Innovación tecnológica: Ciencia de datos y computación.

Área de aplicación industrial: Innovación tecnológica y ciencia de datos.

Recibido: 16 mayo 2024

Aceptado: 28 octubre 2024

Abstract

This work proposes and applies a technique based on statistical data for the design of a Proportional and a Proportional Integral controller for speed, both capable of self-tuning their gains. The self-tuning technique is based on the statistical analysis of the system output, performing a sampling to calculate the mean and standard deviation, and using the value of z according to the central limit theorem. From this analysis, the probability level is estimated, which allows a mapping from the probabilistic space to the controller gain space, using a sigmoid function to adjust the gains online. The controller performance is evaluated and compared in two first-order systems, one stable and the other unstable, as well as in a real-time speed control servomechanism. The self-tuned statistical proportional-integral controller is compared with equivalent controllers tuned using Matlab's pidtune, highlighting the effectiveness of the proposed technique in the automatic adaptation of the controller.

Key words: Statistics, Data, Control, Self-tuning, Servomechanism.

Resumen

Este trabajo propone y aplica una técnica basada en datos estadísticos para el diseño de un controlador proporcional (P) y un proporcional integral (PI) para velocidad, ambos capaces de autosintonizar sus ganancias. La técnica de autosintonización se fundamenta en el análisis estadístico de la salida del sistema, realizando un muestreo para calcular la media y la desviación estándar, y empleando el valor de z según el teorema del límite central. A partir de este análisis, se estima el nivel de probabilidad, lo que permite realizar un mapeo desde el espacio probabilístico hacia el espacio de ganancias del controlador, utilizando una función sigmoide para ajustar las ganancias en línea. El desempeño de los controladores es evaluado y comparado en dos sistemas de primer orden, uno estable y otro inestable, así como en un servomecanismo de control de velocidad en tiempo real. Se compara el controlador proporcional integral estadístico autosintonizado con los controladores equivalentes sintonizados mediante *pidtune* de Matlab, destacando la eficacia de la técnica propuesta en la adaptación automática del controlador.

Palabras clave: Estadística, Datos, Control, Autosintonizado, Servomecanismo.

Introducción

Las técnicas adaptables han sido usadas dentro del sector industrial aproximadamente desde la década de los 80s, sin embargo, en aquella época existían limitantes desde el aspecto científico y tecnológico que concebían que este tipo de controladores fueran complicados de implementar y elevados en su costo.

Sin embargo, actualmente se cuenta con una serie de herramientas computacionales y de hardware que permiten implementar, desarrollar y construir esta clase de controladores adaptables mediante tarjetas de adquisición de datos a un costo reducido, con un procesamiento de datos rápido, análisis matemático y lógico, y en muchos casos en tiempo real.

El control adaptable (Ioannou & Sun, 2010), (Annaswamy & Fradkov, 2021) utiliza una serie de técnicas de adaptación que de forma continua y automática miden las variables dinámicas de la planta, las compara con unos parámetros deseados y mediante su diferencia se modifican las características ajustables del

controlador, que genera un accionamiento que mantiene las variables de la planta en un rango de desempeño; dichas variables son alteradas debido a procesos con características que cambian en el tiempo y/o con las condiciones de operación.

Las técnicas de control adaptable son clasificadas en dos grupos, directas e indirectas (Ioannou & Sun, 2010). Una técnica de adaptación se considera indirecta cuando los parámetros de la planta son estimados en línea y se utilizan para calcular los parámetros del controlador, lo que implica la necesidad de una ley de adaptación. Esto puede resultar contraproducente, ya que en algunas situaciones puede ser difícil definir tanto la ley de control como el estimador de parámetros.

En contraste, las técnicas son directas cuando el modelo de la planta se parametriza en función de los parámetros del controlador, que son estimados de inmediato sin necesidad de cálculos intermedios.

Por otro lado, se tienen técnicas adaptables basadas en ganancias programables y técnicas de autosintonizado (Åström & Wittenmark, 1995). Primero, la ganancia del controlador se ajusta o programa en función de algún parámetro del sistema que se mide o que varía con el tiempo. Esto es común en sistemas no lineales o sistemas con condiciones de operación variables. Se pretende entonces modificar las ganancias del controlador para adaptarse a las diferentes condiciones de operación, lo que mejora el rendimiento general. Sin embargo, estas ganancias se programarán previamente con base en reglas o criterios establecidos.

Por otro lado, la técnica de autosintonizado (*self-tuning*) es una técnica donde el controlador ajusta sus parámetros automáticamente, en tiempo real, en respuesta a los cambios en el comportamiento del sistema. Se realiza al emplear algún tipo de algoritmo de identificación del sistema o método de optimización que permite ajustar las ganancias del controlador a medida que las condiciones del sistema cambian. Los controladores autosintonizados suelen usar algoritmos de estimación para obtener los parámetros del modelo del sistema y ajustar los valores de las ganancias de control.

Los controles autosintonizados son denominados controladores adaptables (Åström & Wittenmark, 1995), debido a que ofrecen ciertas ventajas ante los controladores convencionales, de los cuales se pueden obtener una configuración óptima de su estructura para realizar etapas, asimismo, son capaces de resintonizarse ante perturbaciones o variaciones presentes en el proceso. Dentro de este campo de esta clase de controladores se pueden encontrar un número de técnicas que son empleadas para realizar la tarea de autosintonización, métodos como: lógica difusa (Yager & Filev, 1994), (Soria & Ojeda,

2024), algoritmos de proyección (Sawada & Itamiya, 2011), mínimos cuadrados (Helm *et al.*, 2010), redes neuronales y lógica difusa (Llarena, 2011), y los controladores adaptables (Ioannou & Sun, 2010). La literatura pretende que los lectores y los investigadores se convenzan de que las técnicas de control adaptables son una herramienta útil para el diseño de sistemas de control (Dorf & Bishop, 2001), (Aguador & Martínez, 2003), (Ogata, 2010).

En otro contexto el control estadístico es empleado en procesos cuyo fin es ayudar a identificar las causas especiales que producen variaciones en el proceso y suministrar información para tomar decisiones (Anderson *et al.*, 2011), (Rivera *et al.*, 2023). Entre las aplicaciones del control estadístico del proceso son la aplicación en procesos de producción, control de calidad de las cosas, a las personas y a los actos; y determina y analiza rápidamente las causas que pueden originar desviaciones (Berenson, 2006) para que no vuelvan a presentarse en el futuro.

Las principales aplicaciones inciden en la racionalización de la administración y en consecuencia, en el logro de la productividad de todos los recursos de la empresa (Carot, 2006), (Anderson, 2008), (Levine, 2010). Por ejemplo, en la Figura 1 se muestra una gráfica para el control estadístico aplicado en un proceso donde se considera la media como referencia, un límite superior y un límite inferior. Aquí se da seguimiento a las muestras consideradas donde parte del proceso es dar seguimiento a qué procesos están fuera de control y a futuro aplicar herramientas administrativas y de calidad que ayuden a regular el proceso (Triola, 2009), (Montgomery, 2012), (Chakraborti & Graham, 2019), (Dubey *et al.*, 2019), (Qiu, 2020), (Oakland & Oakland, 2024).

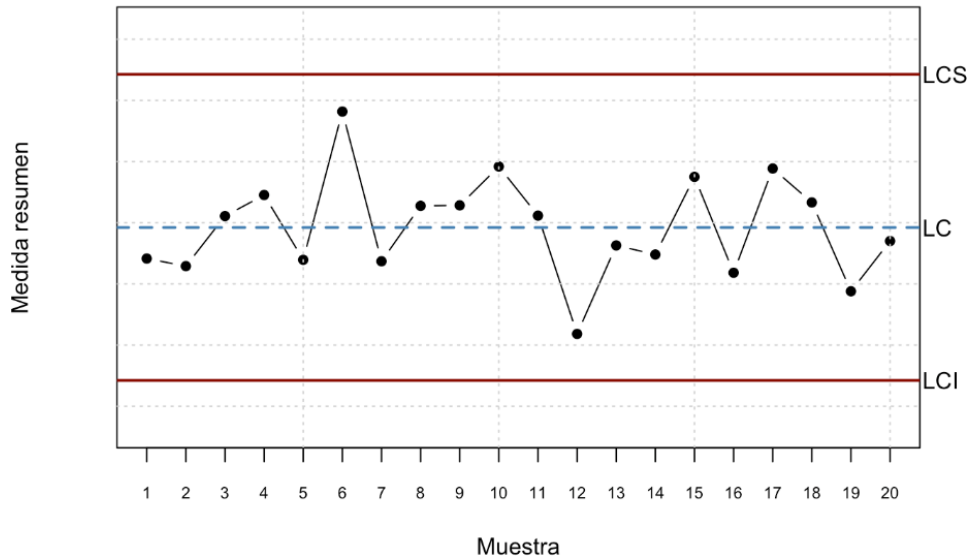


Figura 1. Control estadístico aplicado en procesos (Anderson, 2011).

Sin embargo, el control estadístico busca mantener los procesos con ayuda de reglas de decisión que localicen discrepancias apreciables entre los datos observados y las normas del proceso que se controla (Devore, 2012). Se dice que un proceso está bajo control estadístico cuando sólo se producen variaciones debidas a causas comunes.

Algunos trabajos enfocados en controladores donde usan técnicas estadísticas son usados para comparar y validar controladores del tipo TID (Biresb & Bibhuti, 2024). Por otro lado, se ha desarrollado un nuevo marco para evaluar la estabilidad de los controladores basados en datos y el concepto de estabilidad estadística (Lee, 2023). La novedad de lo anterior radica en que se proporciona un método para analizar la estabilidad de los controladores basados en datos estadísticos para identificación y predicción de sistemas mediante redes neuronales (Ojeda *et al.*, 2019) y el uso de datos metaheurísticos (Bhagat & Saikia, 2023), (Isen, 2022), (Zafar *et al.*, 2024).

Por lo tanto, en este trabajo se combina la técnica de autosintonizado al usar la ganancia programable y el control estadístico,

mediante la propuesta para el diseño de un controlador mediante datos estadísticos en lazo cerrado para un servomecanismo a través de una técnica de autosintonización. Específicamente, los cuales son diseñados un controlador Proporcional y Proporcional Integral (PI) estadístico en lazo cerrado aplicado para la regulación de velocidad de un servomecanismo que emplea conceptos de la estadística como la media, la desviación estándar, el error, el teorema del límite central, la distribución normal, la probabilidad y funciones de probabilidad, que permitirán mapear de una probabilidad al espacio de ganancias del controlador diseñado.

Desarrollo

El objetivo principal es proponer el diseño de un controlador mediante datos estadísticos en lazo cerrado para un servomecanismo mediante una técnica de autosintonización que aplique la ganancia programable y los conceptos básicos de la estadística como el muestreo de una población finita dada por las mediciones de muestreo de la señal de salida. La particularidad del controlador se basa en autosintonizar las ganancias del controlador a

partir de la función de distribución normal y/o las tablas de distribución normal para diferentes puntos de operación.

Para realizar el esquema de control estadístico autosintonizado se parte de la técnica de ganancia programable basada en la estimación de ganancias de forma secuencial, la cual usa cada dato individual tan pronto esté disponible; así, se puede actualizar la estimación de las ganancias del controlador en línea con base en la distribución normal mediante herramientas estadísticas. Para empezar, es puesto a prueba el controlador con una ganancia empírica para estimar la salida, donde es claro que tendrá un error en estado estacionario. A partir de esto, se estima la media de la salida y es usada para estimar el error, una vez que se tiene el error se estima el valor de z del teorema del límite central que asocia una probabilidad con la distribución normal y ajusta las ganancias según el grado

de probabilidad con una función tipo sigmoide.

A continuación, se detallarán las partes que contienen este esquema (ver Figura 2). Primero se tiene a $R(s)$ denominada como la señal de referencia y $Y(s)$ la señal de salida del sistema de control (ambas en el dominio de Laplace), $r(t)$ y $y(t)$ ambas señales en el dominio del tiempo, donde la señal de error $e(t)$ es determinada como la diferencia entre $r(t)$ y la media de y , estimada como el conjunto de muestras de la señal de salida $y(t)$ entre el número de muestras. Un bloque donde se estiman la desviación estándar y el valor de z denotada del teorema del límite central, que permite estimar el nivel de probabilidad del error mediante una distribución normal, finalmente, es mapeada la probabilidad mediante una función del tipo sigmoide que ajusta de manera automática la ganancia del controlador en línea.

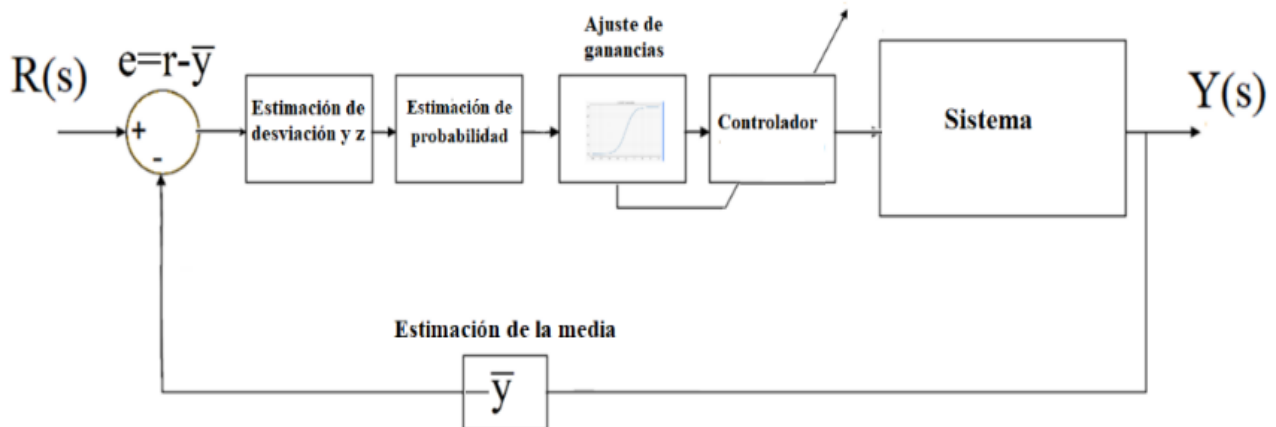


Figura 2. Diagrama del control adaptable estadístico propuesto.

El control estadístico autosintonizado permite programar las ganancias mediante la distribución de datos recabados en el proceso dado, en otras palabras, facilitará regular las variables en el control en un sistema cualesquiera de manera automática como un tipo de control automático. La estrategia para el diseño del control estadístico

autosintonizado se basa en aplicar el muestreo de la salida considerada como una población finita. A partir de esto, se calcula la media para poder estimar la desviación estándar, por lo que, es necesario apoyarse en el teorema que se describe a continuación.

Teorema (Durrett, 2004). Sean una secuencia de muestras aleatorias extraídas de una distribución de valor esperado dada por \bar{y}_n y una varianza finita σ^2 . Se supone que puede estimarse la media muestral de la forma:

$$\bar{y}_n = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad (\text{Ec. 1})$$

Para las primeras n muestras. Con la aplicación de la ley de los grandes números, los promedios muestrales convergen, y por lo tanto convergen en probabilidad al valor esperado \bar{y}_n cuando $n \rightarrow \infty$. Debe considerarse que entre más muestras más precisos y confiables serán los resultados estadísticos. después, es obtenida la desviación estándar mediante los datos de la ecuación (2):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_{n_i} - \bar{y})^2}{n}}. \quad (\text{Ec. 2})$$

Seguido de esto, es usado el teorema del límite central que ayudará a determinar la forma de la distribución muestral de los datos obtenidos. El teorema del límite central aplicado a la distribución muestral de \bar{y} , que dice lo siguiente:

Teorema del límite central (Dinov et al., 2008). El teorema del límite central describe que el tamaño y la forma de la distribución para las fluctuaciones estocásticas alrededor del valor esperado μ , es considerado determinista durante dicha convergencia. De

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\sqrt{n}(\bar{y}_n - \mu) \leq z\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{y}_n - \mu)}{\sigma} \leq \frac{z}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) \quad (\text{Ec. 4})$$

Donde $\Phi(z)$ es la distribución normal evaluada en z . Así, la convergencia es

forma más concreta, considera que a medida que n es mayor, la distribución de la diferencia entre la media muestral \bar{y}_n y su límite μ , cuando es multiplicado por \sqrt{n} se aproxima a la distribución normal con media cero y varianza σ^2 . Mientras que, para n suficientemente grande, la distribución de \bar{y}_n se aproxima arbitrariamente a la distribución normal con media μ y varianza σ^2/n . La utilidad del teorema es que la distribución $\sqrt{n}(\bar{y}_n - \mu)$ se aproxima a la normalidad independientemente de la forma de la distribución de cada y_i , por lo que de manera formal puede presentarse con el teorema.

Teorema de Lindeberg-Lévy (Bradley, 2007). Supongamos que $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ es una secuencia de variables aleatorias con valor esperado $E[y_i] = \bar{y}$ y varianza $Var[y_i] = \sigma^2 < \infty$. Entonces se tiene n que se aproxima a infinito, entonces las variables aleatorias $\sqrt{n}(\bar{y}_n - \mu)$ convergen en una distribución normal $N(0, \sigma^2)$, esto es:

$$\sqrt{n}(\bar{y}_n - \mu) \rightarrow N(0, \sigma^2). \quad (\text{Ec. 3})$$

Para el caso $\sigma > 0$ converge en la distribución, lo que significa que la función de distribución es acumulativa de $\sqrt{n}(\bar{y}_n - \mu)$ converge puntualmente a la distribución normal $N(0, \sigma^2)$ para cada número real z , esto es:

uniforme en z en el sentido de la distribución normal:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| P \left[\sqrt{n} (\bar{x}_n - \mu) \leq z \right] - \Phi \left(\frac{z}{\sigma} \right) \right| = 0 \quad (\text{Ec. 5})$$

Donde \sup denota el límite superior mínimo o el supremo del conjunto, que garantiza que la estrategia de control ayude a sintonizar al sistema y sea estable.

Por otro lado, la distribución normal (Devore, 2012) tiene una gran cantidad de aplicaciones prácticas. La distribución normal también tiene una importante aplicación en inferencia estadística. En el control adaptable estadístico la distribución normal ayudará a describir qué tan probables son los resultados obtenidos del muestreo aplicado, es decir, qué tan probable es que la señal de salida llegue a la referencia. La función de distribución normal es definida matemáticamente como:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{Ec. 6})$$

Donde \bar{y} es la media, σ es la desviación estándar, $\pi \approx 3.14169$ y $e \approx 2.71828$. Debido a que el control estadístico autosintonizado requiere de una variable aleatoria que tiene una distribución normal con una media cero y desviación estándar de uno tiene una distribución normal estándar. Para designar esta variable aleatoria normal se suele usar la letra z .

Los tres tipos de probabilidades que se necesitan calcular son (Anderson *et al.*, 2008): la probabilidad de que la variable aleatoria normal estándar z sea menor o igual que un valor dado; la probabilidad de que z esté entre dos valores dados, y la probabilidad

de que z sea mayor o igual que un valor dado, donde z es:

$$z = \frac{r - \bar{y}}{\sigma} \quad (\text{Ec. 7})$$

Donde la diferencia entre $r(t)$ y la media de y , es la señal de error $e(t)$. Por lo tanto, el valor de z asigna una probabilidad en la distribución normal la cual es asociada con una función de probabilidad es llamada función de masa de probabilidad.

Posteriormente, una vez garantizado que el sistema converge mediante la distribución normal, se usa la definición de función de probabilidad como una función matemática que describe la probabilidad de que una variable aleatoria discreta tome un determinado valor. Es decir, una función de probabilidad devuelve la probabilidad asociada a que una variable discreta sea exactamente igual a un valor.

$$f(z) = p \quad (\text{Ec. 8})$$

Es importante mencionar que la diferencia entre una función de probabilidad y una función de distribución, es el tipo de probabilidad que definen. La función de probabilidad indica la probabilidad de que la variable tome un determinado valor, en cambio, la función de distribución describe la probabilidad acumulada de la variable.

Por tal motivo, el controlador no requiere ajuste y se requiere definir una función inversa que mapee de la probabilidad al espacio de parámetros de las ganancias de controlador (ver Figura 3):

$$p = f^{-1}(k) \quad (\text{Ec. 9})$$

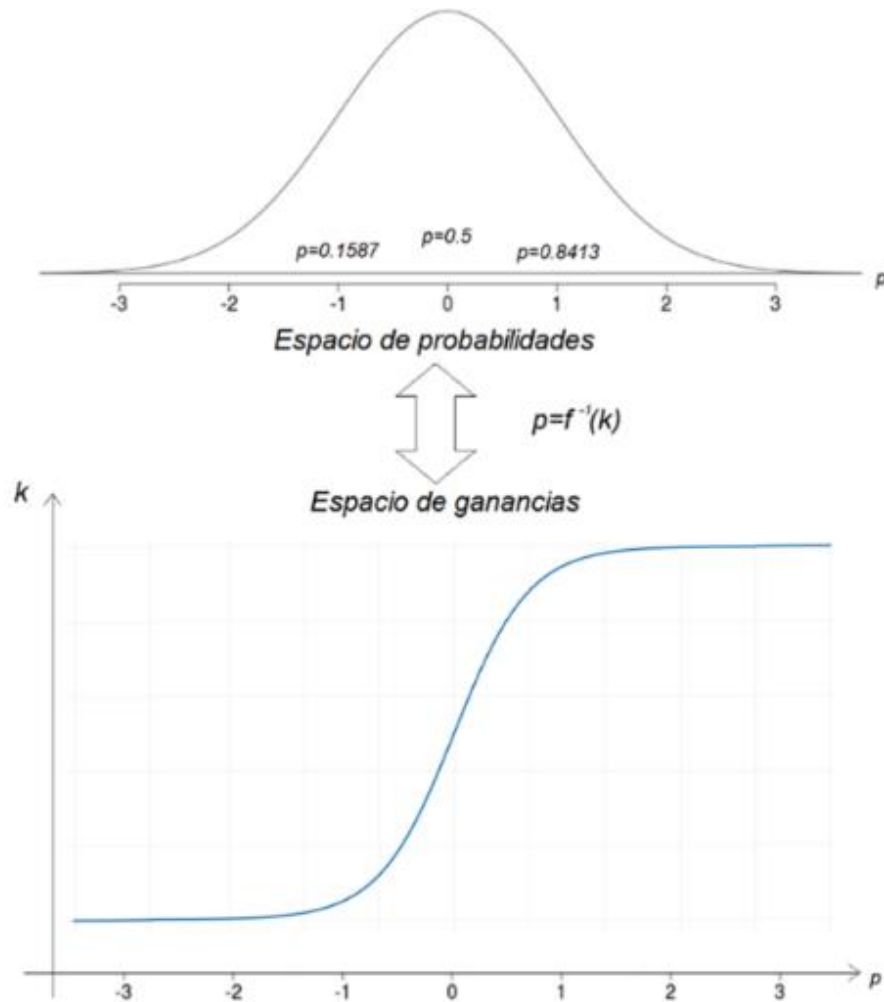


Figura 3 Mapeo del espacio de probabilidad al espacio de ganancias.

La compensación del sistema se basa en el ajuste de ganancias, es el primer paso para llevar al sistema a un comportamiento satisfactorio. Sin embargo, en muchos casos prácticos al ajustar solo la ganancia tal vez no proporcione la alteración suficiente en el comportamiento del sistema para cumplir las especificaciones dadas. Como ocurre con frecuencia, incrementar el valor de la ganancia mejora el comportamiento en estado estacionario, pero produce una estabilidad deficiente o, incluso, inestabilidad.

En el caso particular para sintonizar la ganancia proporcional del controlador es usada la siguiente función sigmoide que

mapea del espacio de probabilidades al espacio de ganancias.

$$f(p) = \frac{50}{1 + e^{-p}} \quad (\text{Ec. 10})$$

Para el caso de la ganancia integral, se estima de forma similar a la proporcional solamente que se calcula la integral del error y es usada la desviación estándar para la dicha integral del error. De manera análoga es usado el teorema del límite central y estimada la probabilidad para la ganancia integral, en caso particular es usada otra función sigmoide que permite estimar las ganancias integrales con:

$$f(p) = \frac{0.1}{1 + e^{-p}} \quad (\text{Ec. 11})$$

Cabe mencionarse que este controlador diseñado permite autosintonizar las ganancias del controlador PI para los ejemplos presentados, buscando siempre que el error en estado estacionario sea o tienda a cero. Además, permite aprovechar las herramientas de la estadística en una nueva clase de controlador mediante técnicas sencillas como

son presentados en los siguientes ejemplos (ver resultados).

Resultados

A. Control proporcional (P) para un sistema de primer orden estable

Sea el diagrama de control de la Figura 4 donde se muestra un controlador proporcional para un sistema de primer orden:

$$G(s) = \frac{10}{s+1} \quad (\text{Ec. 12})$$

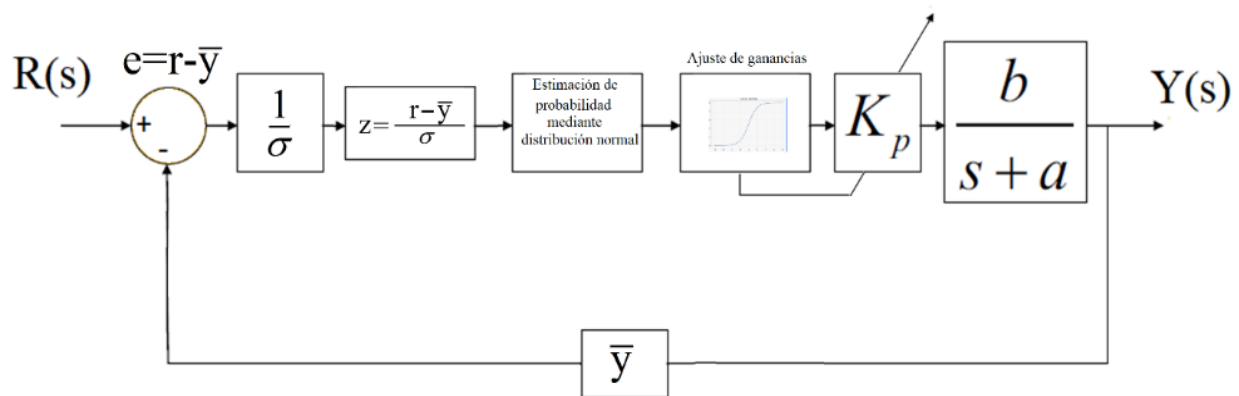


Figura 4. Diagrama de control proporcional adaptable estadístico para un sistema de primero orden estable.

Para llevar cabo la sintonización del controlador estadístico autosintonizado en lazo cerrado, primero es necesario dar un valor a la ganancia proporcional de manera empírica el sistema con una ganancia de $K_p = 0.5$. Así, con una ganancia proporcional $K_p = 0.5$ se define un tiempo de muestreo de 0.61 segundos durante un tiempo de 120 segundos de simulación, por lo que, se estima la media con 195 muestras como se describe a continuación:

$$\bar{y} = \frac{14514.942}{195} = 79.4356 \quad (\text{Ec. 13})$$

Sustituyendo en la ecuación (13) para estimar la desviación estándar se tiene:

$$\sigma = \sqrt{\frac{137108.91}{195}} = 26.516459. \quad (\text{Ec. 14})$$

Estimando el valor de z para aplicar el teorema del límite central

$$z = \frac{100 - 79.435635}{26.516459} = 0.7755321 \quad (\text{Ec. 15})$$

Y estimando el valor de la probabilidad usando la distribución normal

$$p(z) = 0.7823 \quad (\text{Ec. 16})$$

Estimando la ganancia proporcional con la función sigmoide se tiene:

$$K_p(p) = f(p) = \frac{50}{1 + e^{-0.7823}} = 34.3088 \quad (\text{Ec. 17})$$

Se considera ahora, el autosintonizado del sistema de nuevo se tiene que el valor de la salida del sistema llega a 99.7029 revoluciones por minuto (rpm) respecto a la señal de referencia de 100 rpm.

Se obtiene un error en estado estacionario de 0.2971. Por lo que, realizando nuevamente la sintonización el sistema calcula una desviación estándar cercana a cero, es decir, la autosintonización llega a lo más hasta donde se estimó debido a que el controlador proporcional tiene un margen de error. Comprobando que el error en estado estacionario para un sistema de primer orden es dado como:

$$e_{ss} = \frac{ar}{a + bK_p} = \frac{1 * 100}{1 + 10 * 34.2775} = 0.29088 \quad (\text{Ec. 18})$$

Sin embargo, al comparar los resultados estimados del controlador y el error en estado

estacionario definido por (9) puede verse que la diferencia es de 0.00942. Las probabilidades son estimadas en una función en el diagrama de bloques en Matlab-Simulink. Sin embargo, a pesar de las variaciones decimales puede considerarse funcional el desempeño de autosintonizado del controlador estadístico en lazo cerrado.

En la Figura 5 son presentadas las respuestas del controlador estadístico autosintonizado y la respuesta del control equivalente sintonizado mediante la función *pidtune* de Matlab. Para esto fue definida la función de transferencia del sistema y un controlador proporcional cuya ganancia fue estimada mediante la función *pidtune* de 0.204. Las respuestas son comparadas y es claro que el controlador propuesto es capaz de autosintonizarse garantizando una respuesta efectiva y un error mucho menor que con la función de Matlab.

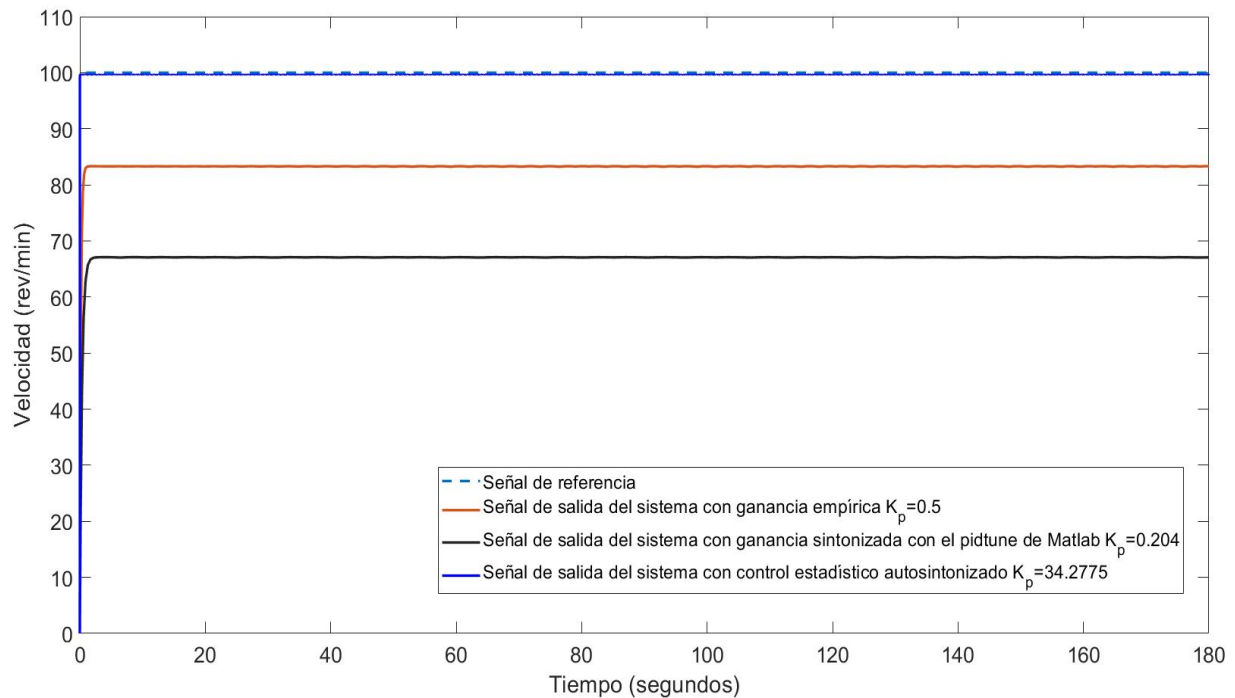


Figura 5. Respuesta del controlador proporcional adaptable estadístico para un sistema de primero orden estable con ganancia empírica, ganancia sintonizada con el *pidtune* de Matlab y ganancia estimada con el controlador.

B. Sistema de primer orden no estable

En este segundo ejemplo es empleado el controlador usando un sistema de primer

orden no estable como se muestra en la Figura 6, es decir, el sistema tiene una raíz en el lado derecho del semiplano complejo.

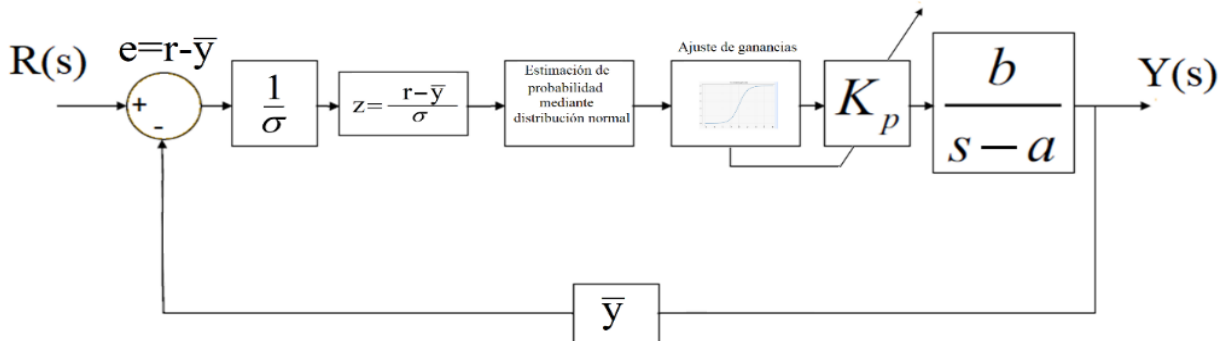


Figura 6. Diagrama de control proporcional adaptable estadístico para un sistema de primer orden inestable.

Para llevar cabo la simulación para la autosintonización del controlador autosintonizado estadístico en lazo cerrado, se selecciona la ganancia $K_p = 0.5$ de manera empírica.

Con dicha ganancia se define un tiempo de muestreo de 0.89 segundos, obteniendo una recolección de 134 muestras en 120 segundos, que ayudaran a estimar la media y la desviación estándar:

$$\bar{x} = \frac{15578.301}{134} = 116.25597 \quad (\text{Ec. 19})$$

Al sustituir en la ecuación (19) para estimar la desviación estándar se tiene:

$$\sigma = \sqrt{\frac{159098.1}{134}} = 34.457209. \quad (\text{Ec. 20})$$

Al estimar el valor de z para aplicar el teorema del límite central:

$$z = \frac{100 - 116.25597}{34.457209} = -0.5588 \quad (\text{Ec. 21})$$

Y calculando el valor de la probabilidad usando la distribución normal:

$$p(z) = 0.2877 \quad (\text{Ec. 22})$$

Estimando la ganancia proporcional con la función sigmoide se tiene:

$$K_p(p) = f(p) = \frac{10}{1 + e^{-0.2877}} = 28.5716 \quad (\text{Ec. 23})$$

Considerando la ganancia autosintonizada para el sistema nuevamente se tiene que el valor de la salida del sistema llega a 100.3342 respecto a la señal de referencia de 100, obteniendo un error en estado estacionario de -0.3342 .

Ahora, se realiza nuevamente la autosintonización con 8592 muestras, estimando la media $\bar{x} = 100.2006$, la desviación estándar $\sigma = 3.1396$, el valor de $z = -0.063893$ y la probabilidad $p = 0.4761$ obteniendo una ganancia proporcional $K_p = 30.8413$. Por lo que, el controlador dará por finalizado el proceso de autosintonización, finalmente, estimando el error en estado estacionario de forma analítica se tiene:

$$e_{ss} = \frac{-ar}{-a + bK_p} = \frac{-1 * 100}{-1 + 10 * 34.2775} = -0.3253 \quad (\text{Ec. 24})$$

Las respuestas del sistema con ambas ganancias son mostradas en la Figura 7, donde puede observarse que el sistema es autosintonizado mediante el controlador propuesto y el controlador sintonizado con la función *pidtune* de Matlab. Para esto fue definida la función de transferencia con un polo inestable y un controlador proporcional

cuya ganancia fue estimada mediante la función *pidtune* de 0.2. El sistema fue puesto a prueba con ambas ganancias y son comparadas, donde es evidente que el controlador propuesto es capaz de brindar una respuesta positiva y un error en estado estacionario menor que la función de Matlab.

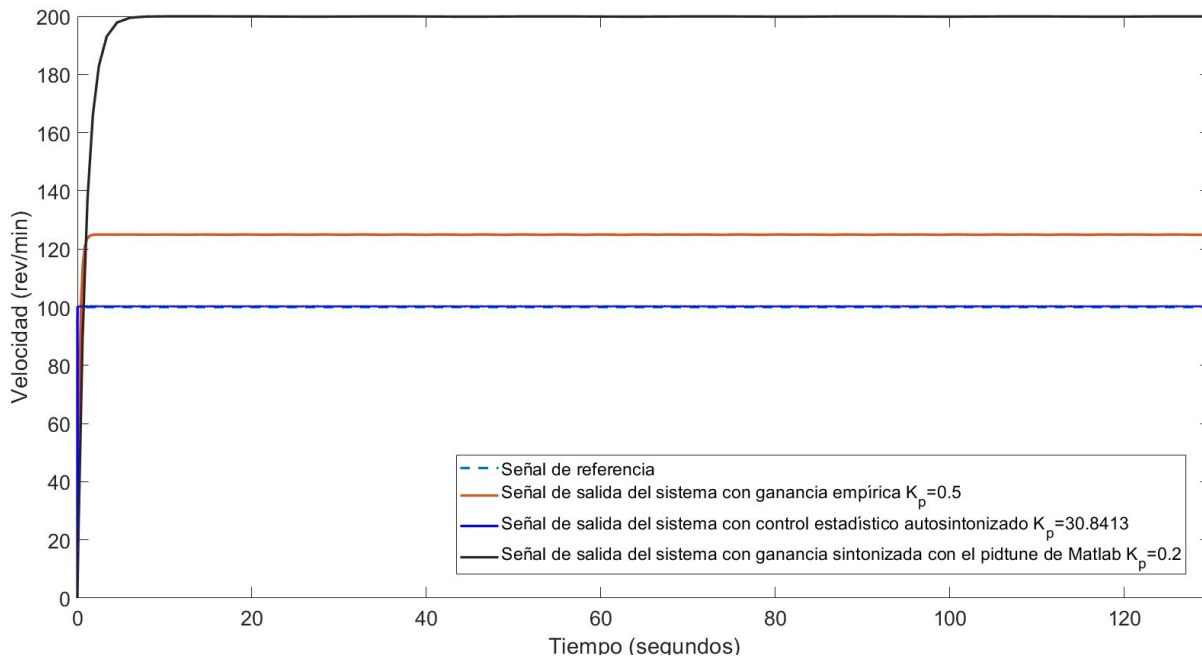


Figura 7. Respuesta del controlador proporcional adaptable estadístico para un sistema de primero orden inestable, con ganancia empírica y ganancia estimada con el controlador.

C. Servomecanismo

Para el caso experimental en tiempo real es usado un servomecanismo. La tarjeta embebida integrada es aplicada para una plataforma de control con características de bajo costo y con desempeño en tiempo real (González *et al.*, 2019). El sistema es construido con hardware basado en un microcontrolador PIC, con entradas emitidas desde la comunicación USB (bus universal en serie) y las salidas para el control de giro de un servomotor, la modulación de ancho de pulso (PWM) y el amplificador de corriente. Además, tiene funcionalidad con programas como Matlab y Scilab (Scilab, 2024) con una computadora en tiempo real. El sistema es integrado y diseñado para realizar funciones

específicas de la teoría del control, es decir, pueden desarrollarse diversas estrategias de control mediante el uso de diagramas de bloques, permitiendo tener una interfaz de usuario mediante los programas mencionados, que facilitan la programación, la configuración y/o el control.

Debido a que la mayoría de las computadoras hoy en día incluyen un conector USB, esto permite el uso de dispositivos de adquisición de datos sin la necesidad de insertarlos en una ranura para placa base. El servomecanismo experimental emplea una interfaz USB de alta velocidad de 480 Mb/s que permite una frecuencia de muestreo de hasta 0.5 milisegundos. La Figura 8 muestra la

arquitectura del sistema con tres elementos: la placa de la plataforma de control que implementa el servomecanismo, la interfaz de hardware para transcripción de datos del puerto paralelo mejorado al estándar USB y

la estructura de software en tiempo real, que puede ser en: Linux mediante RTAI, Scilab/Xcos, controlador y QrtaiLab; y en Windows mediante QUARC (Quanser, 2024) y Matlab-Simulink (ver Figura 9).

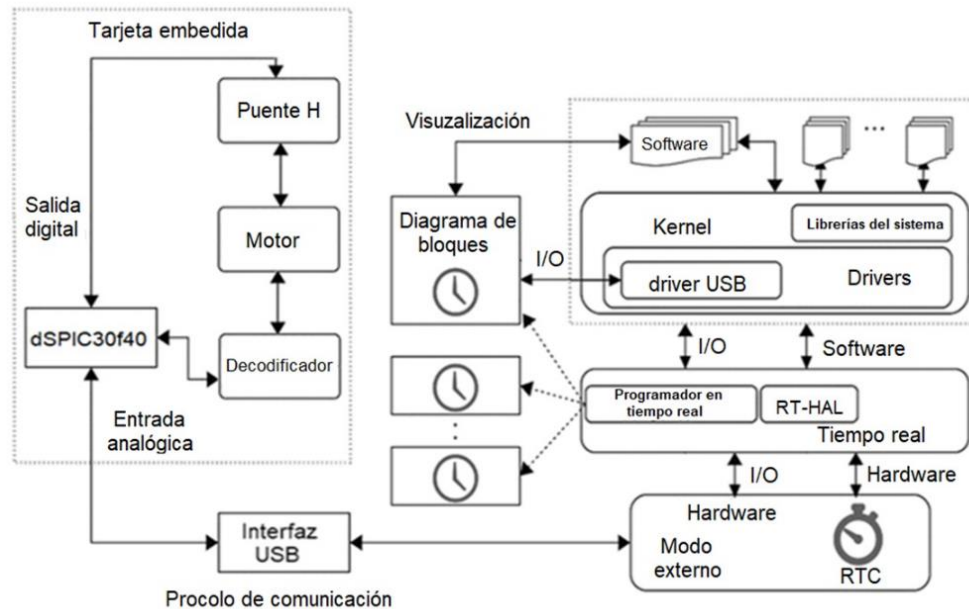


Figura 8. Arquitectura del servomecanismo basado en el hardware, el software y la interfaz.

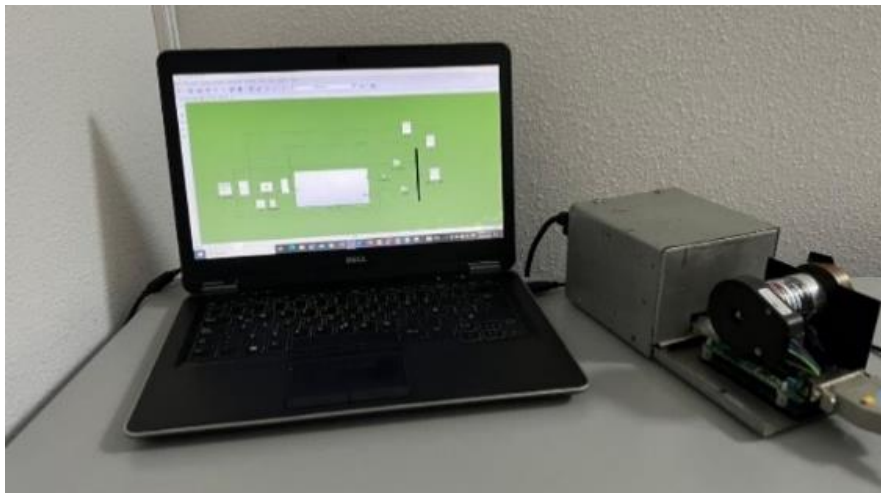


Figura 9. Servomecanismo con una computadora con QUARC y Matlab-Simulink.

El controlador implementado con el servomecanismo es un Proporcional Integral (PI) para velocidad, el cual es capaz de autosintonizarse de manera automática, es decir, mediante las técnicas estadísticas mencionadas anteriormente (ver Figura 10).

Para este caso, es usada la integral del error $e = r - \bar{y}$, la desviación estándar de la integral del error σ_i y el límite central del error z_i , que en conjunto estimaran bajo el principio de

la probabilidad de la integral del error y la distribución normal, la ganancia integral K_i .

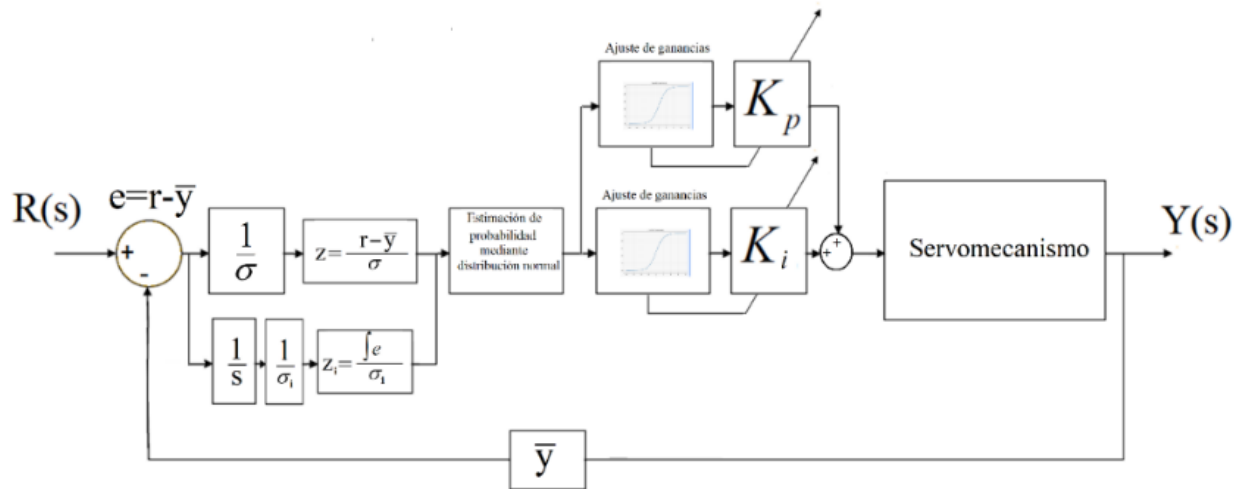


Figura 10. Diagrama de control proporcional integral adaptable estadístico para el servomecanismo presentado.

Para llevar cabo las pruebas experimentales en tiempo real con el servomecanismo establecen lo siguiente, el controlador autosintonizado estadístico en lazo cerrado usa ganancia proporcional inicial $K_p = 0.4$ de manera empírica. Con dicha ganancia se obtienen muestras utilizando un tiempo de muestreo de 0.888 segundos durante 120 segundos obteniendo un total de 135 muestras que ayudaran a estimar la media y la desviación estándar para el controlador autosintonizado:

$$\bar{y} = \frac{10732.4595}{135} = 79.4997 \quad \text{(Ec. 25)}$$

Sustituyendo en la ecuación (25) para estimar la desviación estándar se tiene:

$$\sigma = \sqrt{\frac{165899.9}{135}} = 35.0555 \quad \text{(Ec. 26)}$$

Estimando el valor de z para aplicar el teorema del límite central:

$$z = \frac{100 - 79.4997}{35.0555} = 2.8302 \quad \text{(Ec. 27)}$$

Y estimando el valor de la probabilidad usando la distribución normal:

$$p(z) = 0.9977 \quad \text{(Ec. 28)}$$

Estimando la ganancia proporcional con la función sigmoide se tiene:

$$K_p(p) = f(p) = \frac{10}{1 + e^{-0.9977}} = 36.5303 \quad \text{(Ec. 29)}$$

Ahora, se aplica la misma técnica para estimar la ganancia integral inicializando con una ganancia $K_i = 0.01$ de manera empírica. Con dicha ecuación de la media es estimado el error, sin embargo, en esta sintonización es usada la integral del error y es estimado el error integral promedio:

$$\bar{e}_i = \frac{4.338}{90} = 0.0482 \quad \text{(Ec. 30)}$$

Asimismo, es estimada la desviación estándar para el error integral:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{0.08649}{90}} = 0.0310 \quad (\text{Ec. 31})$$

Por otro lado, es estimado el valor de z_i para el termino integral para el teorema del límite central:

$$z = \frac{0 - 0.0482}{0.0310} = -1.5548 \quad (\text{Ec. 32})$$

Finalmente, la probabilidad es $p=0.0606$ y es estimada la ganancia integral mediante una función sigmoide que mapea del espacio de probabilidades al espacio de ganancias integrales:

$$K_i(p) = f(p) = \frac{1}{1 + e^{-1.55}} = 0.5151 \quad (\text{Ec. 33})$$

Los resultados experimentales son presentados en las siguientes figuras, donde la Figura 11 muestra el control de velocidad con una señal de referencia a 100 revoluciones por minuto. Es claro que las ganancias iniciales brindan una salida de velocidad con un error en estado estacionario mayor que la salida de velocidad con las ganancias ajustadas con el controlador autosintonizado estadístico y el controlador PI con la función *pidtune* de Matlab, como se muestra en la Figura 11.

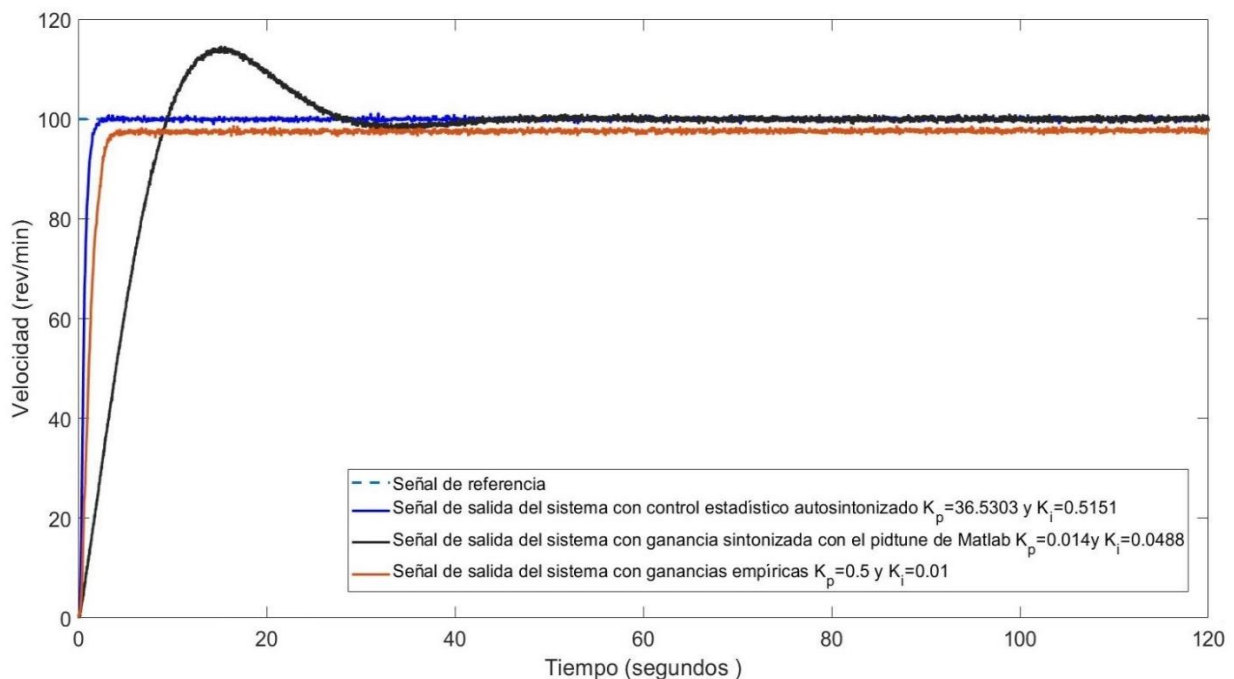


Figura 11. Respuesta del controlador PI autosintonizado usando el servomecanismo con ganancias empíricas, ganancias sintonizadas con el *pidtune* de Matlab y el control estadístico autosintonizado.

Asimismo, en la Figura 12 son mostrados los errores en estado estacionario para el primer experimento en tiempo real con ganancias empíricas, con las ganancias sintonizadas con la función *pidtune* de Matlab y con ganancias autosintonizadas del controlador con la técnica propuesta. Por lo que, puede decirse que la técnica propuesta mediante estadísticas

es efectiva para llevar a cabo el control de velocidad del servomecanismo considerando que usa ganancias iniciales que ayudan a autosintonizar el controlador y, además, es posible controlar la velocidad del servomecanismo sin necesidad de un modelo matemático del mismo.

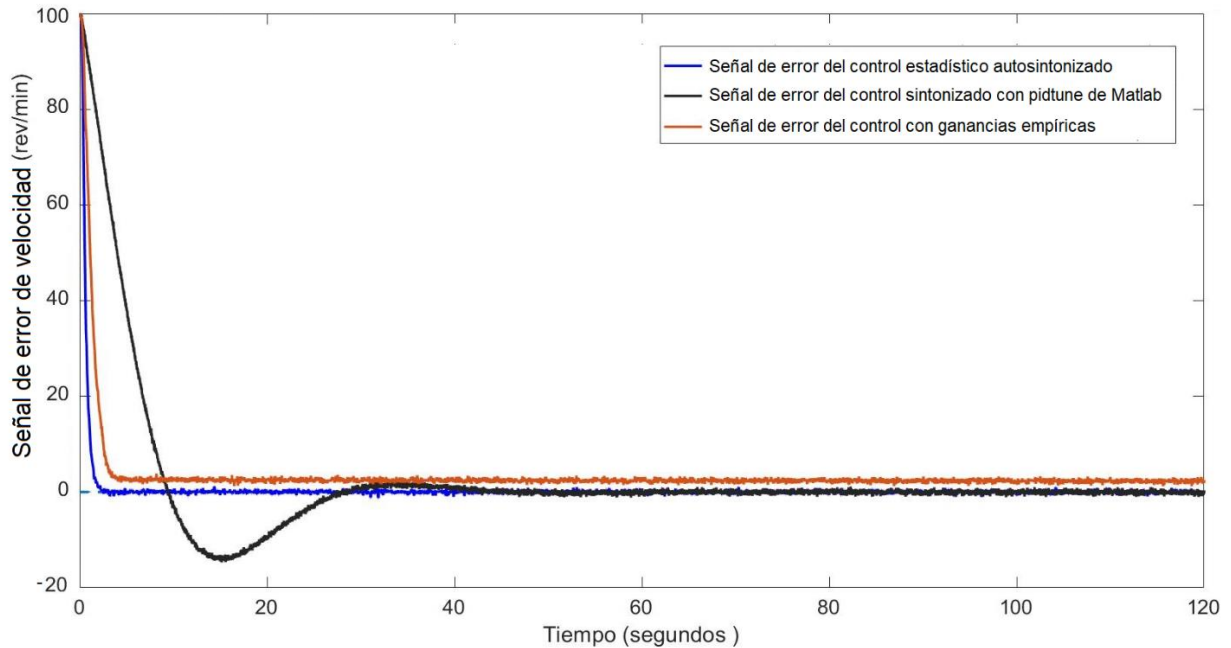


Figura 12. Señales de error del controlador PI autosintonizado usando el servomecanismo con ganancias empíricas, ganancias sintonizadas con el *pidtune* de Matlab y el control estadístico autosintonizado.

Finalmente, es presentada en la Figura 13 la respuesta de velocidad del controlador autosintonizado estadístico mediante la técnica de autosintonización propuesta para una señal cuadrada que regula la velocidad en sentido horario y antihorario a ± 100

revoluciones por minuto en tiempo real. En contraste, es comparada la respuesta para el servomecanismo con las ganancias sintonizadas con la función *pidtune* de Matlab.

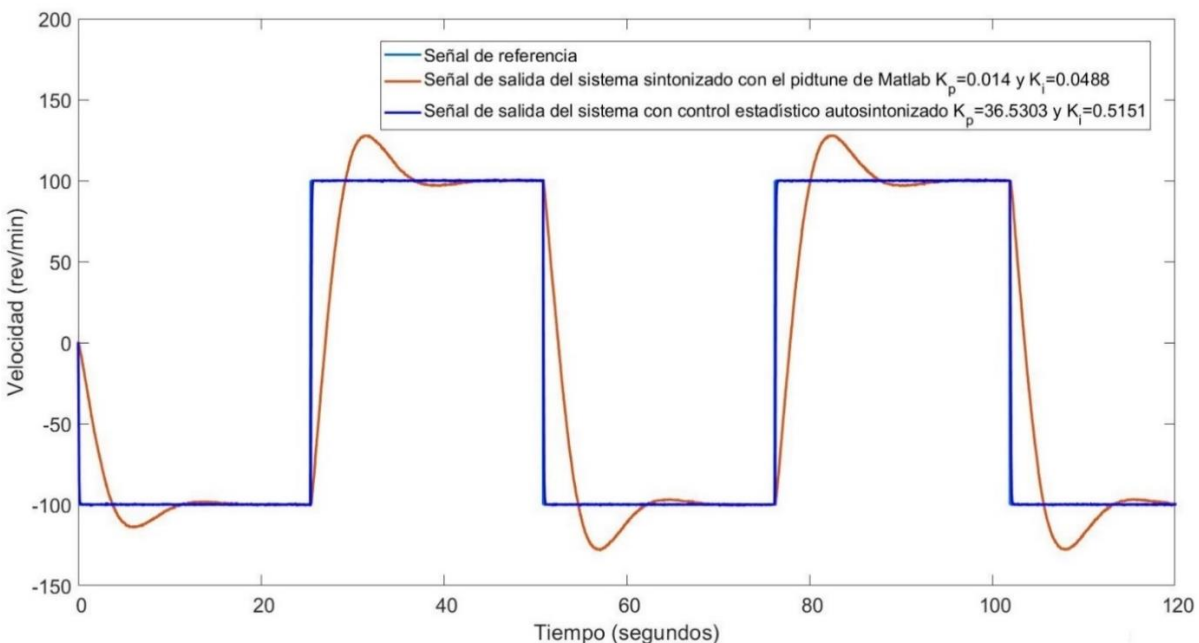


Figura 13. Señal de respuesta de velocidad del servomecanismo usando señal cuadrada mediante el controlador autosintonizado y el *pidtune* de Matlab.

Para este experimento fue definida la función de transferencia del servomecanismo y un controlador PI a sintonizar cuya ganancia proporcional dada por la función *pidtune* fue de 0.014 y una ganancia integral de 0.0488. Las respuestas son comparadas y es claro que el controlador propuesto estadístico autosintonizado es capaz garantizar una respuesta efectiva para el control de velocidad del servomecanismo y un error que tiende a cero comparado con la función de Matlab que brinda ganancias de sintonización.

El uso del controlador PI para el control de velocidad del servomecanismo en lugar de un PID o PD es justificable con base en varios aspectos técnicos y prácticos. Primero, el controlador PI es eficaz para eliminar el error de estado estacionario (Ogata, 2010), (Nise, 2015), (Franklin *et al.*, 2015), (Kuo, 2009). El componente integral se asegura de que el motor alcance y mantenga la velocidad deseada a largo plazo, lo que es esencial en aplicaciones donde la precisión es crítica (Franklin *et al.*, 2015), (Kuo, 2009).

Por otro lado, el diseño y ajuste de un controlador PI es más sencillo en comparación con un PID. Esto puede reducir el tiempo y el costo de desarrollo. La implementación de un controlador PI es menos propensa a errores, lo que es particularmente importante en aplicaciones industriales. En el caso de los controladores PD o PID pueden ser sensibles al ruido en las señales de entrada, lo que puede causar inestabilidad. Un controlador PI, al no tener un término derivativo, es menos afectado por el ruido, lo que permite una operación más estable en entornos ruidosos (Ogata, 2010), (Nise, 2015), (Kuo, 2009).

En el caso de servomecanismos basados en motores por lo regular operan bajo condiciones estables y con cambios de carga suaves, un controlador PI puede proporcionar un control efectivo sin la necesidad de la

rapidez y la complejidad adicional que implica un PID (Ogata, 2010), (Kuo, 2009). El controlador PI requiere menos recursos computacionales que un PID. En sistemas embebidos o con limitaciones de hardware, esto puede ser una ventaja significativa, al permitir que se utilicen en una amplia gama de aplicaciones. Por último, la sintonización de un controlador PI puede ser más intuitiva debido a la reducción de parámetros a ajustar (solo dos: proporcional e integral). Esto facilita el proceso para ingenieros y técnicos que pueden no tener una formación profunda en control avanzado (Ogata, 2010), (Nise, 2015), (Franklin *et al.*, 2015), (Kuo, 2009).

Conclusiones

En este trabajo se presentó y se profundizó en la aplicación de datos estadísticos para la implementación de un controlador proporcional y un controlador proporcional integral, ambos autosintonizados de manera respectiva, que parten de la aplicación de técnicas estadísticas, el teorema del límite central, el uso de la distribución normal, la probabilidad y una función capaz de ajustar las ganancias.

Se presentó el método de autosintonización del controlador P y el controlador PI aplicado en cascada a un sistema de primer orden estable y otro inestable mediante la sintonización mediante el método estadístico presentado que garantizan la estabilidad mediante la demostración presentada del teorema del límite central y los resultados presentados. Cabe mencionar que el tiempo de muestreo puede ser definido durante el diseño del controlador, por lo que, el tiempo de muestreo es el intervalo de tiempo entre cada toma de datos en un sistema de adquisición o control. Tener más muestras (es decir, un tiempo de muestreo más corto) ofrece varias ventajas, especialmente en sistemas dinámicos o de control. Algunas ventajas de aumentar la frecuencia de muestreo es obtener mayor datos

y tener más detalles de la señal, lo que permite representar con mayor exactitud los cambios rápidos de la misma; además se obtiene una representación más precisa de eventos que ocurren en intervalos cortos de tiempo, lo que es crucial en sistemas que requieren una alta precisión.

Por otro lado, al aumentar la tasa de muestreo, se minimiza el riesgo de aliasing, que ocurre cuando las señales de alta frecuencia se confunden con las de baja frecuencia debido a un muestreo insuficiente. En sistemas de control como el presentado, un mayor número de muestras permite respuestas más rápidas y precisas del controlador, que mejora el rendimiento del sistema. Además, si la señal varía rápidamente, un mayor número de muestras capturarán mejor las fluctuaciones, lo que es importante en aplicaciones como en el control de sistemas.

La sintonía de los esquemas de control simulados permitió garantizar la efectividad del controlador propuesto mediante el uso de datos estadísticos y poder extenderlo a un servomecanismo en tiempo real, como fue presentado en este trabajo logrando la regulación de la velocidad del sistema contra las respuestas de la función *pidtune* de Matlab.

En el caso del controlador es diseñado mediante herramientas estadísticas que son aprovechadas mediante el muestreo de datos, el uso de conceptos básicos como la media, la desviación estándar y poder aprovecharlo mediante el teorema del límite central, que mediante la distribución normal es posible estimar una probabilidad con base en el nivel de error del sistema y poder ajustar de manera automática las ganancias dependientes al tipo de controlador.

Como trabajo futuro se considera extender a otros tipos de controladores, a otros tipos de sistemas y a analizar el nivel de robustez del controlador presentado. Además, de

considerar un análisis matemático más profundizado con modelos matemáticos de segundo orden subamortiguados incluso el diseño de los controladores PD y PID con experimentos en tiempo real, como son motores eléctricos, motores piezoeléctricos, sistemas robóticos, sistemas mecánicos, sistemas mecatrónicos, entre otros.

Referencias

Aguador Behar, A., Martínez Iranzo, M. (2003). Identificación y control adaptativo, Prentice Hall.

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camn, J. D. & Martin, K. (2011). Métodos Cuantitativos para los Negocios, Cengage Learning, 11 edición.

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camn, J. D. & Martin, K. (2008). Estadística para Administración y Economía, Cengage Learning, 10 edición.

Annaswamy, Anuradha M. & Fradkov, Alexander L. (2021). A historical perspective of adaptive control and learning, Annual Reviews in Control, Volume 52, pp. 18-41, ISSN 1367-5788, <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2021.10.014>.

Åström, K. J. and Wittenmark, B. (1995). Adaptive Control, Addison Wesley Publishing Company, Inc. ISBN 0-201-55866-1.

Bhagat S. K. & Saikia L. C. (2023). Application of inertia emulation control strategy with energy storage system in multi-area hydro-thermal system using a novel metaheuristic optimized tilt controller *Electr. Power Syst. Res.* **222** 109522, <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2023.109522>

Biresh K. D. & Bibhuti B. P. (2024). A deterministic design approach of tilt integral

derivative controller for integer and fractional-order system with time delay, *Engineering Research Express*, 6(3), 10.1088/2631-8695/ad6ca5.

Bradley, Richard (2007). *Introduction to Strong Mixing Conditions* (1st edición). Heber City, UT: Kendrick Press. ISBN 978-0-9740427-9-4.

Chakraborti, S. & Graham, M. A. (2019). *Nonparametric Statistical Process Control*, 1st ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2019.

Devore, J. L. (2012). *Probabilidad y estadística para Ingeniería y Ciencias*, Cengage Learning, Séptima edición, ISBN-13: 978-607-481-338-8.

Dinov, Ivo; Christou, Nicolas; Sanchez, Juana (2008). Central Limit Theorem: New SOCR Applet and Demonstration Activity. *Journal of Statistics Education* (ASA) 16 (2), 1-15. doi:10.1080/10691898.2008.11889560

Dorf, R. C. & Bishop, R. H. (2001). *Modern Control Systems*, 9th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Dubey, R., Gunasekaran, A., Childe, S.J., Blome, C. and Papadopoulos, T. (2019). Big data and predictive analytics and manufacturing performance: integrating institutional theory, resource-based view and big data culture. *British Journal of Management*, 30(2), pp.341-361.

Durrett, Richard. (2004). *Probability: theory and examples* (3rd edición). Cambridge University Press. ISBN 0521765390.

Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2015). *Feedback control of dynamic systems* (7th ed.). Pearson.

González-Vargas A. M., Serna-Ramírez J. M., Foray-Aguirre C., *et al.* (2019). A low cost,

free-software platform with hard real-time performance for control engineering education. *Computer Applications in Engineering Education*, 1–13. <https://doi.org/10.1002/cae.22084>

Helm, S., Eggert, A., Garnefeld, I. (2010). Modeling the Impact of Corporate Reputation on Customer Satisfaction and Loyalty Using Partial Least Squares. *Springer Handbooks of Computational Statistics*. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-32827-8_23

Ioannou, P. & Sun J. (2010). Robust Adaptive Control. *The Control Systems Handbook, Second Edition: Control System Advanced Methods*, Chapter: 35, Publisher: CRC Press, Editors: William S. Levine. DOI: 10.1201/b10384-41

Isen, E. (2022). Determination of Different Types of Controller Parameters Using Metaheuristic Optimization Algorithms for Buck Converter Systems, *IEEE Access*, vol. 10, pp. 127984-127995, doi: 10.1109/ACCESS.2022.3227347.

Kuo, B. C., & Golnaraghi, F. (2009). *Automatic control systems* (9th ed.). Wiley.

Lee, S. (2023). A Generative Verification Framework on Statistical Stability for Data-Driven Controllers, *IEEE Access*, vol. 11, pp. 5267-5280, doi: 10.1109/ACCESS.2023.3236917.

Llarena, A. (2011). *Redes neuronales y lógica difusa en la creación de mapas topológicos*. Editorial Academia Española, ISBN 3845488999.

Montgomery, D. C. (2012). *Statistical Quality Control*, 7th ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2012.

Nise, N. S. (2015). *Control systems engineering* (7th ed.). Wiley.

Oakland, J., & Oakland, R. (2024). *Statistical Process Control and Data Analytics* (8th ed.). Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9781003439080>

Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*, 5a edición, Pearson, Madrid.

Ojeda Misses, M. A., Baruch, I. S. & Soria López, A. (2019). “A real-time identification for hand-based movements using Recurrent Complex-Valued Neural Networks”, *2019 IEEE 4th Colombian Conference on Automatic Control (CCAC)*, Medellin, Colombia, pp. 1-6, doi: 10.1109/CCAC.2019.8920864.

Quanser, Q2-USB data acquisition device. [Online]. Available: <https://www.quanser.com/products/q2-usb-data-acquisitiondevice/>. [Accessed: 30-Abril-2024].

Qiu, P. (2020). Big data? Statistical process control can help! *Amer. Statistician*, vol. 74, no. 4, pp. 329–344, Oct. 2020, doi: 10.1080/00031305.2019.1700163.

Rivera-Gomez, H., Granillo-Macias, R., Garnica-Gonzalez, J., Anaya-Fuentes, G. (2023). Influence of service level in a stochastic production model with uncertain demand and quality. *DYNA*, 98(6). 544. DOI: <https://doi.org/10.6036/10982>

Sawada, M. and Itamiya, K. (2011). “A design scheme of model reference adaptive control system with using a smooth parameter projection adaptive law”, *SICE Annual Conference 2011*, Tokyo, Japan, pp. 1704-1709.

Scilab Enterprises (2024), Xcos / Features / Scilab / Home – Scilab. [Online]. Available:

<https://www.scilab.org/scilab/features/xcos>. [Accessed: 30-marzo-2024].

Soria-López, A., Ojeda-Misses, M. A., (2024). Desarrollo y aplicación de una tarjeta embebida para el control de un sistema rueda-bola. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, 25 (04), 1-13.
<https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2024.25.4.029>

Triola, M. F. (2009). *Estadística*, Pearson Educación, Décima edición. ISBN: 978-970-26-1287-2

Yager, R. and Filev, D. (1994). *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*. Wiley Interscience. New York, USA. Vol. 1, ISBN:0471017612.

Zafar F., Malik S. A., Ali T., Daraz A., Afzal A. R., Bhatti F., *et al.* (2024) Stabilization and tracking control of underactuated ball and beam system using metaheuristic optimization based TID-F and PIDD²-PI control schemes. *PLoS ONE* 19(2): e0298624.
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0298624>