

ORBIFOLD NO ABELIANO S_3 Y SU GRUPO DE SABOR

NON-ABELIAN ORBIFOLD S_3 AND ITS FLAVOR GROUP

RESUMEN

PÉREZ MARTÍNEZ, Ricardo

El problema del sabor trata de dar una explicación al patrón observado para las masas de los fermiones del Modelo Estándar. Una propuesta para el entendimiento de este problema es considerar grupos discretos no Abelianos como extensiones al Modelo Estándar. Tales grupos de sabor pueden originarse en los orbifolds usados en las compactificaciones de la cuerda heterótica. La relación entre la geometría del orbifold y los grupos de sabor es establecida por la regla de selección del grupo de espacio, la cual ha sido usualmente aplicada a orbifolds Abelianos. Sin embargo, el origen de grupos de sabor a partir de orbifolds no Abelianos no ha sido tan explorado. En este trabajo consideramos el orbifold no abeliano S_3 y determinamos su grupo de sabor al usar el formalismo de la regla de selección basado en la Abelianización del grupo de espacio. La estructura del grupo de sabor que encontramos es $[(Z_2 \times Z_3)]^3 = Z_6^3$.

Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas, Universidad
Autónoma de Coahuila. Saltillo,
Coahuila, México.

Palabras clave: orbifold; teoría de cuerdas; grupo de sabor; regla de selección; abelianización.

ABSTRACT

The flavor problem seeks to explain the observed pattern for the masses of fermions in the Standard Model. One approach to understanding this problem is to consider non-Abelian discrete groups as extensions to the Standard Model. Such flavor groups can originate from the orbifolds used in the compactifications of the heterotic string. The relationship between orbifold geometry and flavor groups is established by the space group selection rule, which has usually been applied to Abelian orbifolds. However, the origin of flavor groups from non-Abelian orbifolds has received scant attention. In this work, we consider the non-Abelian orbifold S_3 and determine its flavor group

Correspondencia
ricardo.perezmartinez@uadec.edu.mx
<https://orcid.org/0000-0003-2923-4970>
Fecha de recepción
14 de enero de 2026.
Fecha de aceptación
11 de mayo de 2026.

using the selection rule formalism based on the Abelianization of the space group. We find the flavor group structure $((Z_2 \times Z_3)^3 = Z_6^3$.

Key words: orbifold; string theory; flavor group; selection rule; abelianization.

1. INTRODUCCIÓN

El Modelo Estándar (ME) describe las partículas elementales y sus interacciones. Es un modelo definido en cuatro dimensiones (4D) y sus predicciones han sido comprobadas experimentalmente con éxito (Langacker, 2010). Sin embargo, el ME no explica algunas cuestiones fundamentales, por ejemplo, el origen y el patrón de las masas de los fermiones (Grossman, 2010). Para tratar de dar una explicación a este problema, conocido como el problema del sabor, se han propuesto grupos discretos no abelianos llamados grupos de sabor, donde la palabra sabor se refiere a los distintos tipos de fermiones en el ME (Ishimori y col., 2010).

Los grupos aplicados al problema del sabor pueden ser elegidos de los grupos conocidos en matemáticas tomando en cuenta su viabilidad fenomenológica en los modelos donde estos grupos son considerados. En tales casos, el origen de los grupos de sabor no proviene del modelo, sin embargo, tales grupos pueden tener un origen en la compactificación de la cuerda heterótica en orbifolds en 6D para obtener modelos que pudieran contener al ME y su versión con supersimetría (Escalante-Notario y col., 2025; Nilles y col., 2012; Ramos-Sánchez, 2009). Para definir a un orbifold en 6D se requiere el espacio real y el grupo de espacio, el cual es generado por traslaciones en una red y el grupo de punto, que a la vez es un subgrupo discreto del grupo ortogonal en 6D. El grupo de punto puede ser Abeliano o no Abeliano, dando lugar al nombre de orbifold Abeliano y no Abeliano. La clasificación de los grupos de espacio para orbifolds que son usados consistentemente en las compactificaciones de la cuerda heterótica es presentada en (Fischer y col., 2013).

El origen de los grupos de sabor a partir de la geometría del orbifold está establecido por la regla de selección del grupo de espacio (Kobayashi y col., 2007; Nilles y Ramos-Sánchez, 2024). En las compactificaciones de la cuerda heterótica en orbifolds Abelianos se han obtenido e inspeccionado distintos grupos de sabor (Carballo-Pérez y col., 2016; Olguín-Trejo y col., 2018;



Ramos-Sánchez, 2017). Algunos orbifolds no Abelianos han sido explorados para efectuar compactificaciones de la cuerda heterótica (Fischer y col., 2013; Hernández-Segura y Ramos-Sánchez, 2025; Konopka, 2013). En la referencia (Ramos-Sánchez y Vaudrevange, 2019) se presenta el formalismo de la regla de selección basado en la Abelianización del grupo de espacio para determinar los grupos de sabor de orbifolds Abelianos, como los reportados en (Fischer y col., 2013).

Dado que el origen de grupos de sabor por la regla de selección en orbifolds no Abelianos no ha sido tan explorado, en este trabajo nos interesa aplicar el formalismo reportado en (Ramos-Sánchez y Vaudrevange, 2019) para determinar el grupo de sabor de un orbifold no Abeliano. Específicamente, el problema que abordamos en este artículo es obtener el grupo de sabor que se origina del orbifold no Abeliano S_3 al usar la regla de selección del grupo de espacio y su Abelianización. Debido a la naturaleza no Abeliana del orbifold S_3 mencionamos algunos aspectos a considerar al aplicar este formalismo, así como algunas observaciones.

La organización de este artículo se presenta enseguida. En la sección 2 presentamos el orbifold no Abeliano S_3 , y algunas propiedades esenciales del grupo S_3 . El formalismo de la regla de selección del grupo de espacio y su Abelianización se muestra en la sección 3. El grupo de sabor que obtenemos al aplicar este formalismo al orbifold no Abeliano S_3 se presenta en la sección 4, junto con algunos comentarios. Finalmente, presentamos las conclusiones en la sección 5.

2. ORBIFOLD S_3

El orbifold S_3 en seis dimensiones (6D) está definido por el cociente

$$O = \frac{\mathbb{R}^6}{S},$$

donde $\mathbb{R}^6$ es el espacio real en 6D y S es el grupo de espacio generado por el grupo de punto $P = S_3$ y traslaciones en una retícula Λ en 6D definida por

$$\Lambda = \{n_i e_i \mid n_i \in \mathbb{Z}\},$$

donde $e_i, i=1,2,\dots,6$, son sus vectores base. La notación $n_i e_i$ indica sumatoria sobre el índice i de 1 a 6. El grupo de permutaciones de tres objetos S_3 está definido por la presentación

$$S_3 = \langle \omega, \theta \mid \omega^2 = \theta^3 = (\omega\theta)^2 = \mathbb{1} \rangle,$$

donde ω y θ son sus generadores, y $\mathbb{1}$ denota al elemento identidad en S_3 . Los elementos del grupo de espacio S se denotan por

$$g = (\omega^k \theta^l, n_i e_i),$$

donde $k=0,1$ y $l=0,1,2$ para el orbifold S_3 . La multiplicación de dos elementos $g = (\varphi, \lambda), g' = (\varphi', \lambda')$ de S está dada por

$$gg' = (\varphi, \lambda)(\varphi', \lambda') = (\varphi\varphi', \varphi\lambda' + \lambda),$$

donde $\varphi = \omega^k \theta^l$ y $\lambda = n_i e_i$. El elemento inverso de $g = (\varphi, \lambda)$ es $g^{-1} = (\varphi^{-1}, -\varphi^{-1}\lambda)$ tal que $gg^{-1} = (\mathbb{1}, 0)$, el elemento identidad del grupo de espacio S .

Los generadores del grupo de espacio S son denotados por

$$g_\omega = (\omega, 0), \quad g_\theta = (\theta, 0), \quad T_i = (\mathbb{1}, e_i),$$

donde g_ω y g_θ generan el grupo de punto, y T_i generan las traslaciones. Los elementos de S se pueden escribir en términos de sus generadores como

$$g = (\omega^k \theta^l, n_i e_i) = T_1^{n_1} \dots T_6^{n_6} g_\omega^k g_\theta^l.$$

La definición del orbifold indica que los elementos g de S actúan sobre las coordenadas x de $\mathbb{R}^6$ como $x' = gx = (\varphi, \lambda)x = \varphi x + \lambda$. Cuando $x' = x$ y el determinante de $(\mathbb{1} - \varphi)$ es no nulo se tienen puntos fijos en el orbifold. Los elementos g de S asociados a los puntos fijos son llamados los elementos constructores. La clase de conjugación de un elemento g de S está definida por

$$[g] = \{hgh^{-1} \mid \forall h \in S\}$$

Cualquier elemento en la clase de conjugación del elemento constructor g denota al mismo punto fijo inequivalente en el orbifold. Esto es importante porque en las compactificaciones de la cuerda heterótica en orbifolds se



obtienen cuerdas torcidas, nuevas cuerdas cerradas que resultan de la acción no trivial de S sobre $\mathbb{R}^6$, con la propiedad de estar adjuntadas a los puntos fijos del orbifold (Ramos-Sánchez, 2017). Entonces, todos los elementos en la clase de conjugación del elemento constructor g denotan a la misma cuerda torcida en el orbifold.

2.1 ALGUNOS ASPECTOS BÁSICOS DEL GRUPO S_3

En esta subsección presentamos algunas propiedades de S_3 que son relevantes en el cálculo del grupo de sabor para el orbifold no Abelianiano S_3 .

Las clases de conjugación de S_3 son $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{\theta, \theta^2\}$ y $C_3 = \{\omega, \omega\theta, \theta\omega\}$. El orden de los elementos en C_2 y C_3 es tres y dos, respectivamente. El subgrupo conmutador de un grupo G es el subgrupo generado por todos los conmutadores $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ de G . El subgrupo conmutador de S_3 es isomorfo al grupo cíclico $\mathbb{Z}_3 = \{1, \theta, \theta^2\}$, el cual es normal en S_3 . La Abelianización de un grupo G está dada por el grupo cociente de G con su subgrupo conmutador. Por lo tanto, la Abelianización de S_3 está dada por

$$\frac{S_3}{\mathbb{Z}_3} = \mathbb{Z}_2,$$

dando lugar al homomorfismo de S_3 a $\mathbb{Z}_2$, donde $H = \{1, \theta, \theta^2\} = \mathbb{Z}_3 = C_1 \cup C_2$, y $M = \{\omega, \omega\theta, \theta\omega\} = C_3$ se comportan como los dos elementos del grupo Abelianiano $\mathbb{Z}_2$. En particular, H toma el papel de la identidad en $\mathbb{Z}_2$, y M corresponde al generador de orden dos de tal grupo.

En la Figura 1 se muestra un esquema que ilustra la Abelianización de S_3 .

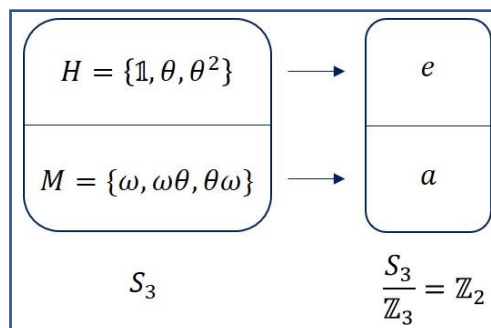


Figura 1. Abelianización de S_3 . Los conjuntos H y M de S_3 son mapeados al elemento identidad, e , y al elemento de orden dos, a , del grupo $\mathbb{Z}_2$ respectivamente. El conjunto H es el grupo $\mathbb{Z}_3$, el cual es el subgrupo conmutador de S_3 .

3. REGLA DE SELECCIÓN DEL GRUPO DE ESPACIO Y SU ABELIANIZACIÓN

La regla de selección del grupo de espacio S establece que la interacción de m cuerdas torcidas es permitida si el producto de sus m elementos constructores es trivial en S , es decir, si se cumple que

$$\prod_{a=1}^m h_a g_a h_a^{-1} = (1, 0),$$

donde g_a , con $a=1,2,\dots,m$, denotan los elementos constructores, y hemos usado la propiedad de que los elementos en la clase de conjugación de g_a denotan a la misma cuerda torcida. Esta regla de selección permite obtener el grupo de sabor a partir de la geometría del orbifold, y establece también una conservación de cargas discretas k,l,n_i que garantizan que la regla de selección se cumpla (Kobayashi y col., 2007; Olguín-Trejo y col., 2018).

Una manera alternativa e interesante de la regla de selección del grupo de espacio se presenta en (Ramos-Sánchez y Vaudrevange, 2019), donde los autores determinan el grupo de sabor de orbifolds Abelianos presentados en (Fischer y col., 2013) al considerar la Abelianización del grupo de espacio. Enseguida presentamos los aspectos básicos de este formalismo, para mayores detalles ver la referencia (Ramos-Sánchez y Vaudrevange, 2019).

Sea s un mapeo del grupo de espacio S al grupo de sabor denotado por D_S , y con las siguientes propiedades:

- i) s es una función de la clase de conjugación de S , y entonces se verifica que

$$s(hgh^{-1}) = s(g),$$

para todo h, g de S .

- ii) s es una representación de S , y entonces se cumple que

$$s(g_1 g_2) = s(g_1) s(g_2),$$

donde g_1, g_2 son elementos de S .

En este formalismo la regla de selección del grupo de espacio está dada por



$$\prod_{a=1}^m s(g_a) = s(1, 0) = 1$$

donde 1 denota al elemento identidad del grupo de sabor D_S . Además, se verifica que $s(hg) = s(gh)$ por lo que el conmutador $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ cumple que

$$s([g, h]) = 1.$$

Por lo tanto, la representación s de S es equivalente a la Abelianización de S (Ramos-Sánchez y Vaudrevange, 2019). Para obtener el grupo de sabor D_S del orbifold necesitamos primero obtener la presentación del grupo de espacio S , la cual está formada por las siguientes relaciones:

$$g_\omega^M, g_\theta^N, [g_\omega, g_\theta], [T_i, T_j], [g_\omega, T_i], [g_\theta, T_i],$$

donde M y N denotan el orden de g_ω y g_θ . Después, se determina la presentación del grupo de sabor D_S usando el mapeo s de S a D_S junto con la Abelianización del grupo de espacio, $s([g, h]) = 1$. En la siguiente sección aplicamos este formalismo al orbifold no Abeliano S_3 .

4. GRUPO DE SABOR DEL ORBIFOLD NO ABELIANO

Consideramos el orbifold S_3 reportado en (Konopka, 2013). Los generadores del grupo de espacio son $g_\omega = (\omega, 0)$, $g_\theta = (\theta, 0)$, $T_i = (1, e_i)$, donde $e_i, i = 1, 2, \dots, 6$, son los vectores base de la red Λ . Los generadores del grupo de punto $P = S_3$ son g_ω y g_θ . Los elementos ω y θ están dados, en la base de la red, por las matrices

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



las cuales cumplen que $\omega^2 = \theta^3 = (\omega\theta)^2 = \mathbb{1}$, la matriz identidad de dimensión seis. Las evaluaciones de las expresiones que necesitamos para obtener la presentación del grupo de espacio se presentan en la **Tabla 1**.

En la primera columna se muestran las expresiones que necesitamos para obtener la presentación del grupo de espacio. En la segunda columna se muestran sus resultados de acuerdo a la geometría del grupo de espacio del orbifold S_3 . La notación $T_1^{-1}T_2^{-2}$ indica $T_1^{-1}T_2^{-2} = (\mathbb{1}, -e_1 - 2e_2)$, etc.

Tabla 1. Generadores y sus conmutadores para la presentación del grupo de espacio.

Expresiones para los generadores de S	Relaciones para la presentación de S
g_ω^M, g_θ^N	$g_\omega^2 = g_\theta^3 = (\mathbb{1}, 0)$
$[g_\omega, g_\theta]$	$[g_\omega, g_\theta] = (\theta, 0) = g_\theta$, y entonces $[g_\omega, g_\theta]^3 = (\mathbb{1}, 0)$
$[T_i, T_j]$	$[T_i, T_j] = (\mathbb{1}, 0)$
$[g_\omega, T_i]$	$[g_\omega, T_1] = (\mathbb{1}, 0), \quad [g_\omega, T_2] = T_1^{-1}T_2^{-2},$ $[g_\omega, T_3] = (\mathbb{1}, 0),$ $[g_\omega, T_4] = T_3^{-1}T_4^{-2}, \quad [g_\omega, T_5] = T_5^{-2}, \quad [g_\omega, T_6] = T_6^{-2}$
$[g_\theta, T_i]$	$[g_\theta, T_1] = T_1^{-1}T_2, \quad [g_\theta, T_2] = T_1^{-1}T_2^{-2}, \quad [g_\theta, T_3] = T_3^{-2}T_4^{-1},$ $[g_\theta, T_4] = T_3T_4^{-1}, \quad [g_\theta, T_5] = (\mathbb{1}, 0), \quad [g_\theta, T_6] = (\mathbb{1}, 0)$

De esta forma, la presentación del grupo de espacio S está dada por

$$S = \langle g_\omega, g_\theta, T_i \mid g_\omega^2, g_\theta^3, [g_\omega, g_\theta]^3, [T_i, T_j], [g_\omega, T_1], [g_\omega, T_2] T_1 T_2^2, \dots, [g_\theta, T_6] \rangle,$$

donde los tres puntos (...) indican las otras relaciones asociadas a $[g_\omega, T_i]$ y $[g_\theta, T_i]$. Cada término a la derecha de la línea vertical en la presentación de S es igual a $(\mathbb{1}, 0)$, el elemento identidad del grupo de espacio.

Aplicando la función s de S a D_S obtenemos la presentación del grupo de sabor,

$$D_S = \langle s(g_\omega), s(g_\theta), s(T_i) \mid s(g_\omega)^2, s(g_\theta)^3, s(T_1 T_2^2), s(T_3 T_4^2), s(T_5^2), s(T_6^2),$$

$$s(T_1 T_2^{-1}), s(T_1 T_2^2), s(T_3 T_4), s(T_3^{-1} T_4) \rangle,$$

donde hemos usado la Abelianización del grupo de espacio, y entonces, expresiones como $s([g_\omega, T_2])s(T_1 T_2^2) = 1$ llegan a ser $s(T_1 T_2^2) = 1$. Además,



hemos removido los términos asociados a los conmutadores triviales, por ejemplo, $s([T_i, T_j])$.

Para obtener el grupo de sabor del orbifold no Abelian S_3 analizamos las relaciones que definen la presentación de D_S , estas son:

$$a) s(g_\omega)^2 = 1, s(g_\theta)^3 = 1$$

$$b) s(T_1)s(T_2)^2 = 1, s(T_1)s(T_2)^{-1} = 1$$

$$c) s(T_3)s(T_4)^2 = 1, s(T_3)^2s(T_4) = 1, s(T_3)^{-1}s(T_4) = 1$$

$$d) s(T_5)^2 = 1, s(T_6)^2 = 1$$

De a) se obtiene el grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Las relaciones en b) indican que $s(T_1) = s(T_2)$, por lo que $s(T_1)^3 = 1$, lo cual define el grupo $\mathbb{Z}_3$. Análogamente, de c) se obtiene otro grupo $\mathbb{Z}_3$ ya que $s(T_3) = s(T_4)$, y entonces $s(T_3)^3 = 1$. Finalmente, las expresiones en d) definen al grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Por lo tanto, el grupo de sabor D_S que se origina de este orbifold no Abelian S_3 al aplicar la regla de selección del grupo de espacio y su Abelianización está dado por

$$D_S = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Las cargas discretas asociadas a este grupo de sabor son $k, l, n_1 + n_2, n_3 + n_4, n_5$ y n_6 , respectivamente. Las condiciones que deben cumplir tales cargas para que la interacción de cuerdas torcidas sea permitida, es decir, que la regla de selección del grupo de espacio se verifique, son $k = 0 \bmod 2$, $l = 0 \bmod 3$, $n_1 + n_2 = 0 \bmod 3$, $n_3 + n_4 = 0 \bmod 3$, $n_5 = 0 \bmod 2$ y $n_6 = 0 \bmod 2$.

Lo anterior puede entenderse al considerar el elemento constructor $s(g) = s(T_1)^{n_1}s(T_2)^{n_2} \dots s(T_6)^{n_6}s(g_\omega)^k s(g_\theta)^l$ y la presentación de D_S . Por ejemplo, sabemos que $s(T_1) = s(T_2)$ y que $s(T_1)^3 = 1$. Entonces, la parte $s(T_1)^{n_1}s(T_2)^{n_2}$ de $s(g)$ llega ser $s(T_1)^{n_1+n_2}$ con la condición $n_1 + n_2 = 0 \bmod 3$ asociada al grupo $\mathbb{Z}_3$. De una manera análoga se obtienen las condiciones para las demás cargas discretas.



5. DISCUSIÓN

El conmutador $[g_\omega, g_\theta]$, donde $g_\omega = (\omega, 0)$ y $g_\theta = (\theta, 0)$, merece una atención en el cálculo del grupo de sabor D_S para el orbifold no Abelian S_3 , ya que a diferencia de los orbifolds Abelianos donde tal conmutador es el elemento identidad, aquí tenemos que $[g_\omega, g_\theta]$ es un elemento no trivial del subgrupo conmutador de S_3 , y por lo tanto tal conmutador es de orden tres. En base a esto tenemos las siguientes tres observaciones:

Primera, sabemos que el conmutador $[g_\omega, g_\theta] = (\theta, 0)$. Entonces, al aplicar la función s de S a D_S , tenemos que $s([g_\omega, g_\theta]) = s(\theta, 0) = s(\theta^2, 0)$, ya que s es una función de la clase de conjugación de S . Como $g_\theta = (\theta, 0)$ y $g_\theta^2 = (\theta^2, 0)$ son de orden tres, se tiene que

$$s([g_\omega, g_\theta])^3 = s(g_\theta)^3 = s(g_\theta)^6 = 1,$$

lo cual podría conducir a elegir $s(g_\theta)^6 = 1$ como la expresión para obtener la parte del grupo de sabor asociado a esta relación, es decir, el grupo $\mathbb{Z}_6$. Lo anterior es erróneo en este caso ya que el grupo $\mathbb{Z}_3$ está definido como $\mathbb{Z}_3 = \{1, \theta, \theta^2 \mid \theta^{\{0 \bmod 3\}} = 1\}$, y entonces se cumple que $\theta^0 = \theta^3 = \theta^6 = \theta^9 = \dots = \theta^{\{0 \bmod 3\}} = 1$. Es decir, en $\mathbb{Z}_3$ tener al generador θ con $\theta^3 = 1$ para su definición, es lo mismo que tomarlo con $\theta^6 = 1$, o $\theta^9 = 1$, etc. Entonces, en la relación de igualdades mostrada anteriormente para $s([g_\omega, g_\theta])^3$ debemos tomar el menor entero positivo no nulo del conjunto de exponentes $\{3, 6\}$ para $s(g_\theta)$. De esta manera obtenemos el grupo correcto para esta relación, $\mathbb{Z}_3$ a partir de $s(g_\theta)^3 = 1$.

Segunda, el conmutador $s([g_\omega, g_\theta])^3 = s(g_\theta)^3 = 1$ nos sugiere dos visiones alternativas. Una, que reproduce la relación del generador de orden tres, g_θ , que ya teníamos desde un inicio. Dos, que simplemente veamos el resultado final $s([g_\omega, g_\theta])^3 = 1$, y entonces, una relación trivial que no conduce a una relación nueva o independiente. Por lo tanto, la estructura del grupo de sabor definido por la presentación de D_S no es modificada por el conmutador $s([g_\omega, g_\theta])^3$.

Tercera, el elemento $g_\omega = (\omega, 0)$ no surge en el conmutador $[g, h]$, donde g y h son de la forma $(\alpha, 0)$ con $\alpha \in S_3$. Esto es porque el subgrupo conmutador de S_3 es $\mathbb{Z}_3 = \{1, \theta, \theta^2\}$, lo cual establece que $[g, h] = (1, 0)$ o $(\theta, 0)$ o $(\theta^2, 0)$.



Excluyendo el caso trivial, resulta que los casos donde $[g, h] = (\theta, 0)$ o $(\theta^2, 0)$ corresponden a las maneras equivalentes de elegir a los dos generadores del grupo S_3 . Por ejemplo, $[g, h] = (\theta, 0)$ para $g = g_\omega = (\omega, 0)$ y $h = g_\theta = (\theta, 0)$, $[g, h] = (\theta^2, 0)$ para $g = g_\theta$ y $h = g_\omega$, o también para $g = g_\omega$ y $h = g_{\omega\theta} = (\omega\theta, 0)$, etc. Esto es también entendido al recordar la definición del grupo S_3 mediante su presentación mostrada en la sección 2.

Por otra parte, el grupo de sabor $D_S = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ puede ser escrito en forma más compacta como $\mathbb{Z}_6^3$, ya que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_6$. Sin embargo, para indicar sus cargas discretas es conveniente escribir la estructura de D_S en una forma no completamente factorizada, como lo escribimos originalmente.

De esta forma es posible notar una correspondencia directa entre las cargas discretas $k, l, n_1 + n_2, n_3 + n_4, n_5, n_6$ con el grupo cíclico factor asociado. Por ejemplo, la asociación n_5 con $\mathbb{Z}_2$ indica que $n_5 = 0 \bmod 2$, lo cual es una manera sencilla de expresar la condición más general $\sum_{a=1}^m n_5^{(a)} = 0 \bmod 2$, y de manera análoga para las otras cargas de acuerdo al orden del grupo cíclico correspondiente. Tales condiciones sobre las cargas implican que la interacción de m cuerdas torcidas sea permitida bajo el grupo de sabor D_S , es decir, que el término de interacción de las m cuerdas torcidas sea invariante bajo este grupo. Equivalentemente, tales condiciones sobre las cargas garantizan que la regla de selección del grupo de espacio se verifique, y entonces que el producto $s(g_1)s(g_2)\dots s(g_m) = 1$, donde $g_a = (\omega^{k^{(a)}}\theta^{l^{(a)}}, n_i^{(a)}e_i)$, con $a = 1, 2, \dots, m$, denotan los elementos constructores de las m cuerdas torcidas en interacción.

CONCLUSIONES

Motivados por explorar el origen de grupos de sabor en orbifolds no Abelianos, nos propusimos determinar el grupo de sabor para el orbifold S_3 reportado en (Konopka, 2013) al usar el formalismo de la regla de selección del grupo de espacio y su Abelianización presentado en (Ramos-Sánchez y Vaudrevange, 2019). Encontramos que el grupo de sabor para este orbifold no Abeliano S_3 es

$$D_S = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$



donde el primer grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ proviene de la parte del grupo de punto $P = S_3$ del grupo de espacio mediante las relaciones $s(g_\omega)^2 = 1$ y $s(g_\theta)^3 = 1$, mientras que los demás grupos factores surgen de la parte traslacional del grupo de espacio, en particular de los conmutadores $s([g_\omega, T_i])$ y $s([g_\theta, T_i])$. Las cargas discretas para D_S son $k, l, n_1 + n_2, n_3 + n_4, n_5$ y n_6 , respectivamente. Tales cargas cumplen las condiciones $k = 0 \bmod 2$, $l = 0 \bmod 3$, $n_1 + n_2 = 0 \bmod 3$, $n_3 + n_4 = 0 \bmod 3$, $n_5 = 0 \bmod 2$ y $n_6 = 0 \bmod 2$, las cuales garantizan que la regla de selección del grupo de espacio se cumpla. Notamos también que el conmutador $s([g_\omega, g_\theta])^3$ no influye en las demás relaciones que determinan el grupo de sabor D_S para este orbifold no Abelian S_3 .

PLANES FUTUROS

Para otros orbifolds no Abelianos como los reportados en (Fischer y col., 2013) que incluyen roto-traslaciones (elementos del grupo de punto más traslaciones que no están en la retícula) habría que inspeccionar la influencia de $s([g_\omega, g_\theta])^m$, donde m es el orden del conmutador $[g_\omega, g_\theta]$, en las relaciones que determinan al grupo de sabor D_S , ya que podría pasar que $s([g_\omega, g_\theta])^m$ fuera no trivial, resultando en una posible modificación a la estructura esperada de D_S . Este análisis formará parte de un trabajo futuro.

REFERENCIAS

- Carballo-Pérez, B., Peinado, E., & Ramos-Sánchez, S. (2016). $\Delta(54)$ flavor phenomenology and strings. *Journal of High Energy Physics*, 2016(12): 131. [https://doi.org/10.1007/jhep12\(2016\)131](https://doi.org/10.1007/jhep12(2016)131)
- Escalante-Notario, E., Pérez-Martínez, R., Ramos-Sánchez, S., & Vaudrevange, P. K. (2025). The non-SUSY orbifold: A tool to build promising non-supersymmetric string models. *Computer Physics Communications*, 317: 109829. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2025.109829>
- Grossman, Y. (2010). Introduction to flavor physics. CERN Document Server (European Organization For Nuclear Research): 73-106. <https://doi.org/10.5170/cern-2010-002.111>

- Fischer, M., Ramos-Sánchez, S., & Vaudrevange, P. K. (2013). Heterotic non-abelian orbifolds. *Journal of High Energy Physics*, 2013(7):80. [https://doi.org/10.1007/jhep07\(2013\)080](https://doi.org/10.1007/jhep07(2013)080)
- Fischer, M., Ratz, M., Torrado, J., & Vaudrevange, P. K. (2013). Classification of symmetric toroidal orbifolds. *Journal Of High Energy Physics*, 2013(1):84. [https://doi.org/10.1007/jhep01\(2013\)084](https://doi.org/10.1007/jhep01(2013)084)
- Hernández-Segura, M., & Ramos-Sánchez, S. (2025). Non-Abelian orbifolds of the SO(32) heterotic string. *Physical Review. D.*, 112(6): 066002. <https://doi.org/10.1103/1zqj-c9ty>
- Ishimori, H., Kobayashi, T., Ohki, H., Shimizu, Y., Okada, H., & Tanimoto, M. (2010). Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics. *Progress Of Theoretical Physics Supplement*, 183: 1-163. <https://doi.org/10.1143/ptps.183.1>
- Kobayashi, T., Nilles, H. P., Plöger, F., Raby, S., & Ratz, M. (2007). Stringy origin of non-Abelian discrete flavor symmetries. *Nuclear Physics B*, 768(1-2): 135-156. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2007.01.018>
- Konopka, S. J. H. (2013). Non-Abelian orbifold compactifications of the heterotic string. *Journal of High Energy Physics*, 2013(7):23. [https://doi.org/10.1007/jhep07\(2013\)023](https://doi.org/10.1007/jhep07(2013)023)
- Langacker, P. (2017). *The Standard Model and Beyond*. (Second edition). Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group. 636 Pp.
- Nilles, H. P., & Ramos-Sánchez, S. (2024). The flavor puzzle: Textures and symmetries. *International Journal of Modern Physics A*, 39(09n10): 2441003. <https://doi.org/10.1142/s0217751x24410033>
- Nilles, H., Ramos-Sánchez, S., Vaudrevange, P., & Wingerter, A. (2012). The orbifolder: A tool to study the low-energy effective theory of heterotic orbifolds. *Computer Physics Communications*, 183(6): 1363-1380. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.01.026>
- Olguín-Trejo, Y., Pérez-Martínez, R., & Ramos-Sánchez, S. (2018). Charting the flavor landscape of MSSM-like Abelian heterotic orbifolds. *Physical Review. D.*, 98(10): 106020. <https://doi.org/10.1103/physrevd.98.106020>
- Ramos-Sánchez, S. (2009). Towards low energy physics from the heterotic string. *Fortschritte Der Physik*, 57(10): 907-1036. <https://doi.org/10.1002/prop.200900073>
- Ramos-Sánchez, S. (2017). On flavor symmetries of phenomenologically viable string compactifications. *Journal of Physics Conference Series*, 912: 012011. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/912/1/012011>
- Ramos-Sánchez, S., & Vaudrevange, P. K. S. (2019). Note on the space group selection rule for closed strings on orbifolds. *Journal of High Energy Physics*, 2019(1): 55. [https://doi.org/10.1007/jhep01\(2019\)055](https://doi.org/10.1007/jhep01(2019)055)