

Estudio cinemático del péndulo simple por técnica de video análisis y simulación numérica

Kinematic study of the simple pendulum by video analysis technique and numerical simulation

Esteban de Jesús Solís-Rivera¹, María Guadalupe Godina-Cubillo¹, Carlos Eduardo Rodríguez-García¹, Jesús Alberto López-Valdez², José Luis Fraga-Almanza¹

¹ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila, Prol. David Berlanga, S/N, Edif. A, C.P. 25000, Saltillo, Coahuila, México.

² Facultad de Ciencias Químicas, Universidad Autónoma de Coahuila, Ing. J. Cárdenas Valdez S/N República, 25280 Saltillo, Coahuila.

Universidad Autónoma de Coahuila
Correo electrónico: esteban.solis@uadec.edu.mx

Resumen

En el presente trabajo se usaron técnicas de video análisis mediante la herramienta computacional Tracker para estudiar el movimiento oscilatorio de un péndulo simple, así como el desarrollo de una simulación del movimiento del péndulo simple utilizando el lenguaje de programación de propósito general llamado Python. En un primer caso, se videograbó el experimento del péndulo simple por medio de un sistema pendular de marca FICER. Para el segundo caso, se creó una simulación del péndulo simple, en la aproximación de ángulos pequeños mediante la solución analítica de la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo simple. Subsecuentemente, se compararon la solución numérica de Runge Kutta de orden 4 con los datos experimentales obtenidos del péndulo real. El valor calculado para la aceleración de la gravedad por medio del experimento fue de: (9.8064 ± 0.0129) m/s², con el cual se comprobó que, mediante técnicas de video análisis y simulación numérica, es posible encontrar y analizar el problema de la aceleración de la gravedad y el movimiento armónico simple con buenos resultados.

Palabras claves: Péndulo simple, ecuación diferencial, movimiento armónico simple, video análisis, Tracker, Runge-Kutta.

Abstract

In the present work, video analysis techniques using the Tracker computational tool were used to study the oscillatory motion of a simple pendulum, as well as the development of a simulation of the motion of the simple pendulum using the general purpose programming language called Python. In the first case, the simple pendulum experiment was videotaped using a FICER brand pendulum system. For the second case, a simulation of the simple pendulum was created in the small angle approximation using the analytical solution of the differential equation describing the motion of the simple pendulum. Subsequently, the Runge Kutta numerical solution of order 4 was compared with the experimental data of the pendulum. The value of

the acceleration of gravity was obtained: $(9.8064 \pm 0.0129) \text{ m/s}^2$, which proved that by means of video analysis and numerical simulation techniques, it is possible to find and analyze the gravity acceleration and the simple harmonic motion with good results.

Keywords: Simple pendulum, differential equation, simple harmonic motion, video analysis, Tracker, Runge-Kutta.

Introducción

El análisis de los experimentos de cinemática tal como es el péndulo simple por medio de la implementación de técnicas de video es un método novedoso desde el advenimiento de las tecnologías de investigación y comunicación (TICS). Consiste en la videograbación de experimentos controlados con cámaras o celulares para la obtención de un video de buena calidad que puede ser analizado posteriormente con un programa informático. Uno de los softwares utilizados para tal fin es la herramienta de video análisis y modelación Tracker que es de acceso libre (Brown, 2022). Por medio de Tracker introducir el video del experimento cinemático y es posible seguir la posición (coordenadas x,y) del objeto en movimiento, así como el tiempo como variable independiente quien es el tiempo del video. En este sentido, Tracker es una buena herramienta computacional que puede asistir a los alumnos de cursos de nivel superior como Laboratorio de Mecánica (Laboratorio de Física I y II) de carreras como Ingeniería Física, Mecánica, Eléctrica por mencionar algunas (Abdel y Moreno, 2022).

Por otro lado, las simulaciones numéricas de las ecuaciones fundamentales de la física que describen la cinemática del movimiento armónico simple (MAS), esto es el movimiento pendular se pueden programar a través del lenguaje de programación Python. Siendo este uno de los lenguajes de programación de código abierto y de

alto nivel de gran relevancia en los últimos años en áreas como la física debido al paradigma de programación orientado a objetos que lo hace simple y legible al programador. Por tanto, el objetivo de este trabajo es estudiar el MAS de un sistema de péndulo simple para ángulos pequeños por medio de técnicas de video análisis, además hacer una comparación de las ecuaciones del péndulo en su aproximación armónica. También, se plantea calcular el valor de la aceleración de la gravedad y compararlo con el valor estándar con fines de validar la metodología experimental y en análisis.

Conceptos básicos

Newton empleó el péndulo en diversos experimentos para: 1) determinar la constante de la gravedad de la Tierra, g ; 2) demostrar la inexistencia del éter propuesto por Aristóteles; 3) mostrar la relación entre el peso y la masa, 4) estudiar las colisiones entre objetos y 5) determinar la velocidad del sonido, entre otras cosas. El péndulo aparece en la obra de Newton Principios matemáticos de la filosofía natural publicada en 1687 (Newton, 1687). Uno de los primeros usos que se le dio al péndulo fue el experimento para determinar si la hipótesis del éter era correcta.

El péndulo simple es un sistema mecánico que presenta un movimiento periódico al soltarlo desde una posición fuera del equilibrio (reposo), consiste en una partícula de masa m suspendida de una cuerda ligera de longitud l de masa despreciable (Serway y Jewett, 2009). La ecuación diferencial que describe el MAS para ángulos pequeños es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \quad (1)$$

donde $\omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}$. La ecuación anterior es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, cuya solución general está dada por exponenciales

complejos, pero para fines prácticos se utilizará la siguiente equivalencia (como se puede apreciar en el Apéndice I), donde el ángulo (θ) está dado por:

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi) , \quad (2)$$

donde A es la amplitud, ω es la frecuencia y ϕ es la fase.

La aceleración de la gravedad (g) se puede medir de varias formas y una de ellas es a través de un péndulo, esto mediante la frecuencia de oscilación (Ecuación 3). Esto debido a que depende de la gravedad y de la longitud del hilo (Solís, 2022). Por lo que al despejar la gravedad de la ecuación de la frecuencia tenemos:

$$g = \omega^2 l . \quad (3)$$

Al derivar estas ecuaciones, se ha despreciado la resistencia del aire y otras formas de fricción en el sistema, además hacemos la suposición de que nuestro péndulo se puede modelar como una masa puntual unida a una varilla o cuerda rígida y sin masa (Serway y Jewett, 2009).

Video análisis por medio de Tracker

Tracker es una herramienta de modelado y análisis de vídeo Open Source Physics (OSP), desarrollado en el marco de trabajo de código Java. La finalidad de esta herramienta es para su uso en la física. Con este programa se puede rastrear los movimientos de los objetos en los videos para obtener sus datos de posición y tiempo en 2D, y con ello las cantidades físicas asociadas, como la velocidad, la aceleración, el impulso y la energía de una manera más sencilla. Este programa es de gran relevancia para los laboratorios y clases de física las cuales involucren la experimentación y modelado de los fenómenos físicos, dado que a su licencia de uso libre y de su interfaz amigable con el usuario.

Simulación numérica por medio del lenguaje Python en su versión 3

Los ordenadores electrónicos modernos permiten realizar cálculos extremadamente largos en un tiempo insignificante. Por lo tanto, hoy en día los ordenadores ofrecen la mejor vía para aplicar las leyes básicas de la naturaleza a sistemas físicos complejos y realistas. La utilización de Python como lenguaje de programación se debe a que posee una licencia de código abierto, específicamente de Python Software Foundation, (PSF) y puede ser estudiado, modificado y compartido por quien sea sin infringir leyes ni limitar nuestra libertad como usuarios. Este a su vez es simple y entendible, debido a que se trata de un lenguaje interpretado que se puede implementar de modo interactivo o bien a través de la construcción de un script (secuencia de instrucciones), lo que permite que incluso un principiante pueda trabajar con él. No tiene limitaciones puesto que es multiplataforma y multiparadigma.

Metodología Experimental y Computacional

Algo habitual después de la elaboración de un experimento en el laboratorio, es la creación de una simulación sobre el fenómeno físico en cuestión, con el cual se tratará de explicar su comportamiento. Dicha simulación puede predecir con buena aproximación también los datos experimentales que se obtengan de su recreación en el laboratorio. Esto visto en las medidas de la amplitud de las oscilaciones de un péndulo, es posible obtener una función oscilatoria analítica que describa ese movimiento con la frecuencia y amplitud adecuadas para cualquier instante de tiempo.

Primer caso: El péndulo simple

El experimento consistió en efectuar el análisis del movimiento péndulo de la marca FICER, al se planeó variar su longitud con los valores tal como los que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Lista de variaciones de la longitud l , como la longitud del péndulo planificados en el diseño experimental. Fuente: Elaboración propia.

l (m)	Error $\pm$ (m)
0.05	0.001
0.10	0.001
0.15	0.001
0.20	0.001
0.25	0.001
0.30	0.001

La longitud del péndulo fue medida con una cinta métrica, el ángulo con el que fue grabado incluyo un error sistemático, por lo que se tuvo que volver a medir por medio del software ImageJ, así como también el ángulo inicial. En la Tabla 2 se muestran los valores medidos reales de las longitudes y ángulos por medio del software ImageJ al analizar las fotografías de las figuras 1a-f. Los valores angulares se midieron tomando la horizontal en el pivote o posición de donde péndula la masa, la longitud desde el pivote hasta el centro de masa de la esfera (Ver figura 1 a-f).

Tabla 2. Valores medidos reales de las longitudes y ángulos (respecto a la horizontal) obtenidos por ImageJ. Fuente: Elaboración propia.

#	Ángulo ($^{\circ}$)	Longitud (m)
a	80.342	0.069

b	80.685	0.119
c	80.072	0.17
d	80.016	0.221
e	80.015	0.274
f	80.174	0.322

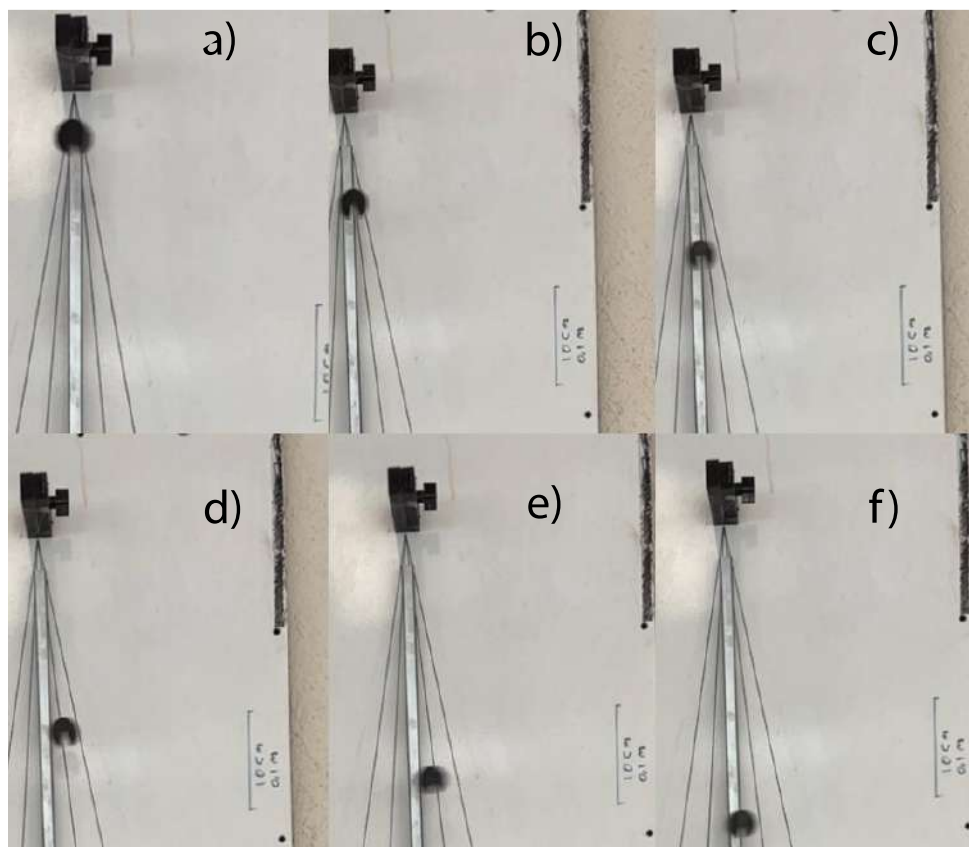


Figura 1. Péndulo a diferentes longitudes (l): a) 0.05 m, b) 0.10 m, c) 0.15 m, d) 0.20 m, e) 0.25 m, f) 0.30 m. Fuente: Elaboración propia.

Una vez medidas las longitudes, se dejan oscilar partiendo las masas de la posición de no equilibrio de lado izquierdo en los ángulos mostrados en la Tabla 2. Así que se obtuvieron los videos, estos fueron analizados en el software Tracker. El procedimiento que se realizó fue el mismo para el análisis de cada caso. Para esta labor, primero se tuvo abierto el video en el programa Tracker, después de esto se definieron los ejes coordenados, estos se colocaron en el centro del marco del péndulo, a estos se le ajustó el ángulo de inclinación para que quedaran

completamente alineados a los ejes de simetría del péndulo marca comercial FICER. Luego de esto, se creó una “masa puntual” (masa de pixeles a seguir) en el programa Tracker, con la finalidad de poder dar seguimiento al objeto seleccionado (pixeles seleccionados), con el cual se analizó el movimiento del péndulo. De este video análisis se obtuvieron los datos tanto de la posición (x,y) del péndulo en metros y el tiempo t que es el tiempo del video, y que tiene una resolución de 0.01 s. Finalmente se graficaron estos datos respecto al tiempo en un script diseñado en Python. Las gráficas se mostrarán en la sección de resultados.

Segundo caso: Simulación numérica con Python versión 3

En este segundo caso, se elaboró un script en Python con la finalidad de encontrar la aproximación a solución de la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo simple. Primero se eligió un método numérico para construir una aproximación a las imágenes de la función en valores particulares. El método de Runge-Kutta de orden cuatro (RK4), es uno de los métodos más utilizados en la práctica (ingeniería y física). Es un método recursivo y su cálculo no implica utilizar información adicional como ocurre en los métodos de Taylor (Jakobsen, 2021). Por lo que se creó el script del método RK4, para poder resolver la ecuación diferencial dentro de la simulación y de dicha manera poder hacer la descripción del movimiento del péndulo simple.

El uso de un método explícito para la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias introduce en el cálculo un error, lo que hace que difiera respecto a la solución real. El error de truncamiento de RK4 es inducido en cada etapa sucesiva del algoritmo al ser iterado, y este se comportará de la forma:

$$e_r = Ch^5, \quad (4)$$

para alguna constante C . Aquí C es un número independiente de h , pero dependiente de t_0 (*tiempo inicial*) y de la cuarta derivada de la solución exacta $\ddot{x}(t)$ en t_0 (es decir, el factor constante en el término de error correspondiente al truncamiento de la serie de Taylor para $x(t_0+h)$).

Resultados

En esta sección se exhiben los resultados del análisis de los datos obtenidos durante el experimento y la simulación. Se resalta que los resultados presentaron una gran similitud entre la simulación y los datos experimentales de la oscilación del péndulo simple. En primer lugar, se presenta la gráfica de posición, esta respecto al tiempo, para el caso del experimento físico del péndulo simple, para la cual se contemplaron los fotogramas comprendidos entre el fotograma 0 y el fotograma 50, esto para tener un tiempo estandarizado entre cada video análisis. En segundo lugar, se expondrá la gráfica de posición, respecto al tiempo, pero de la simulación. Y finalmente se muestra la gráfica de posición respecto al tiempo, del experimento y de la simulación en una sola gráfica con la finalidad de visualizar la comparación entre el experimento y la simulación. Como ejemplo de caso, se analizará el análisis del péndulo cuya longitud, es $l = 0.221$ m, aunque se obtuvieron gráficas (no mostradas aquí) para todas las longitudes mencionadas en la *Tabla 1*. Para una longitud del péndulo $l = 0.221$ m, al analizar la gráfica de posición versus tiempo un comportamiento nuevamente sinusoidal, como se observa en la Figura 2, con una frecuencia de $\omega = 6.659$ Hz.

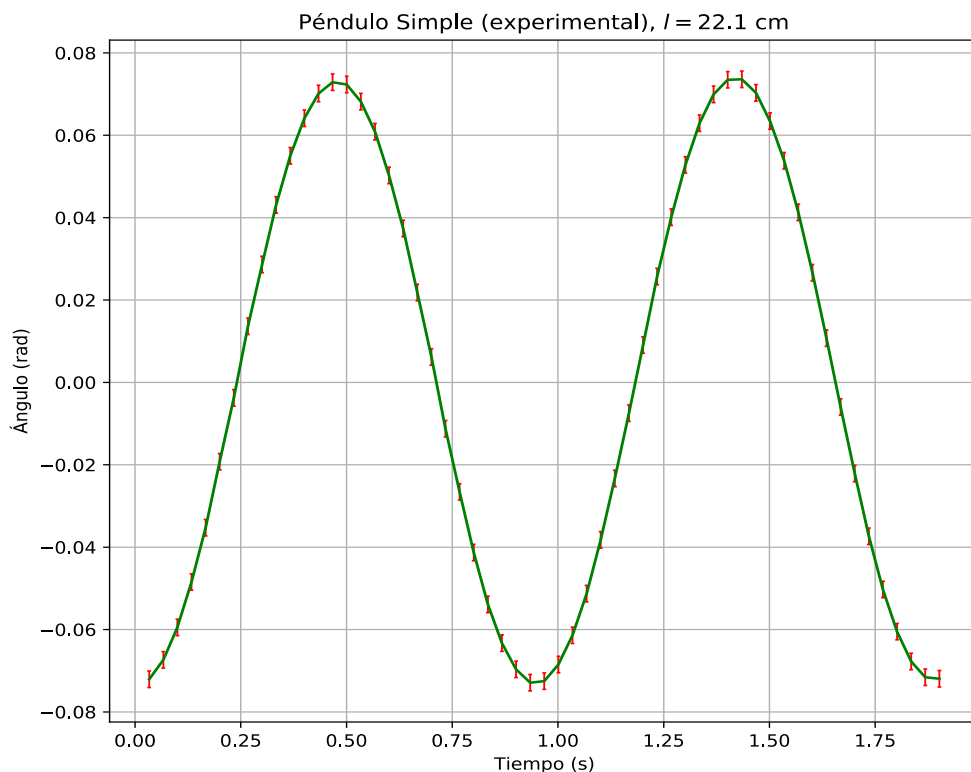


Figura 2 Gráfica de la posición del péndulo versus tiempo, longitud a $l = 0.221$ m. Fuente: Elaboración propia.

Los resultados fueron los esperados, las frecuencias son lo más cercanas a las encontradas en los ajustes sinusoidales de los experimentos. En la Figura 3, se muestra graficada la posición simulada del péndulo con respecto del tiempo en segundos, esto con la longitud simulada del péndulo a $l = 0.221$ m. Se observa, como se esperaba, un comportamiento sinusoidal, la cual tiene una frecuencia de $\omega = 6.659$ Hz.

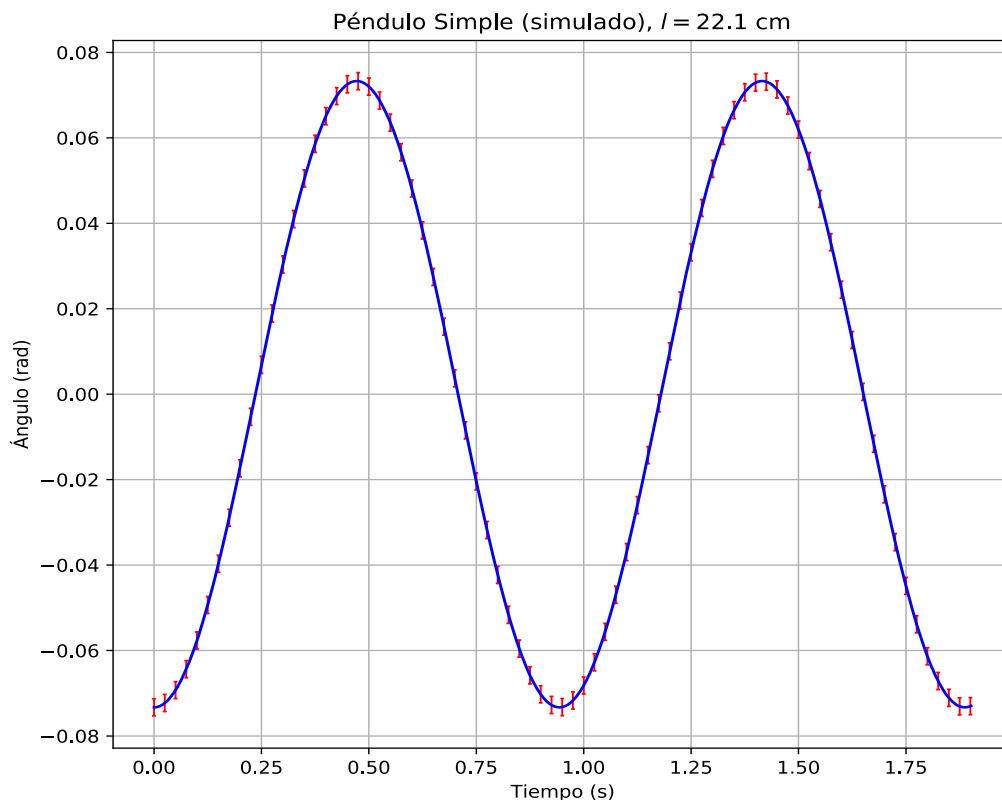


Figura 3 Gráfica de la posición simulada del péndulo versus tiempo, longitud a $l = 22.1$ cm. Fuente: Elaboración propia.

Para constatar las verdaderas diferencias entre cada una de las gráficas, en la Tabla 3 se muestran las frecuencias de cada caso ($l = 0.069$ m, 0.1197 m, 0.17 m, 0.221 m, 0.2744 m, 0.3225 m), en las cuales podemos observar que son prácticamente similares.

Tabla 3. Resumen los valores de la longitud del péndulo y de la frecuencia correspondiente a cada longitud. Fuente: Elaboración propia.

l (m)	ω (Hz) (Experimento)	ω (Hz) (Simulación)
0.069	11.919	11.918
0.119	9.048	9.050
0.17	7.594	7.593
0.221	6.659	6.659
0.274	5.979	5.979
0.322	5.515	5.515

Y para mostrar el ajuste que hay entre la experimentación y la simulación, en la Figura 4 se grafican la posición experimental y simulada del péndulo con respecto del tiempo en segundos, esto con una longitud del péndulo a $l = 0.221$ m. Se puede observar que el al sobreponer una gráfica sobre la otra, se tiene un ajuste casi perfecto, los pequeños cambios que hay dentro de la amplitud y de fase quedan dentro del error permitido ($<5\%$) (Solís, 2022).

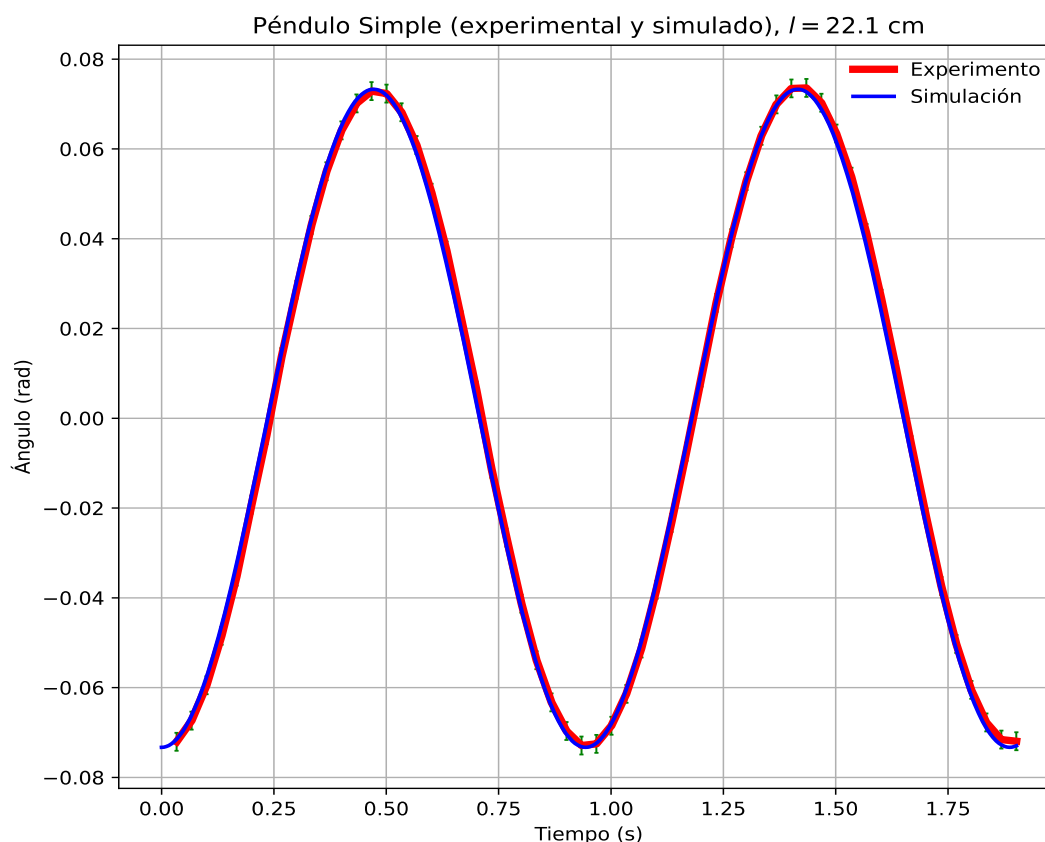


Figura 3 Gráfica de la posición simulada del péndulo versus tiempo, longitud a $l = 22.1$ cm.
 Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 4 se presentan los valores obtenidos del cálculo de la aceleración de la gravedad en ambos casos (experimental y simulación).

Tabla 4. Comparación de las aceleraciones obtenidas por experimentación versus las obtenidas mediante la simulación. Fuente: Elaboración propia.

l (m)	a (m/s ²) (Experimento)	a (m/s ²) (Simulación)
0.069	9.802	9.801
0.119	9.799	9.799
0.17	9.804	9.801
0.221	9.800	9.800
0.274	9.809	9.809
0.322	9.809	9.809

Este MAS estudiado por medio de nuestro experimento, se puede comparar con el caso estudiado en el trabajo realizado por Yuningsih y col., (2020) en su trabajo titulado: “*Determination of earth's gravitational acceleration and moment of inertia of rigid body using physical pendulum experiments*”, en el cual realizan el experimento del péndulo simple con una barra rígida. En el miden el período de oscilación y la posición del eje de oscilación, con ello y utilizando las leyes del movimiento, determinaron las ecuaciones que contienen las constantes que implican el valor de la aceleración gravitatoria de la tierra y el momento de inercia de los objetos que pivotan en el centro de masa. El resultado del valor de la aceleración de la gravedad obtenido por Yuningsih y col., (2020), con un valor de $a = 9.799 \text{ m/s}^2$ es muy cercano a nuestro $a = (9.804 \pm 0.0129) \text{ m/s}^2$ para las longitudes de $l = 0.2744 \text{ m}$ y $l = 0.3225 \text{ cm}$. La diferencia entre el trabajo de Yuningsih y col., (2020) con respecto de la presente investigación es que en su caso ellos utilizan un péndulo con una varilla rígida y por tanto tienen en cuenta el momento de inercia del centro de masa de la varilla rígida. Su aproximación del valor de g está tiene un error relativo de 0.1% respecto al valor estándar de $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, lo cual es muy bueno, mientras que mediante nuestra metodología tenemos un error relativo de 0.06% para nuestro mejor resultado. Aunque sabemos que el valor de la aceleración de la gravedad puede variar con respecto de la latitud y longitud terrestres ya que la Tierra es un

planeta cuasi-esférico la cual posee diferentes valores de radiovector desde su centro a donde se desea medir. Por lo que podemos afirmar en suma que el valor de g en Saltillo Coahuila, mediante este experimento basado en el movimiento pendular y MAS es de: $g = (9.804 \pm 0.0129) \text{ m/s}^2$, cifra que fue calculada a partir de los valores de la aceleración en los casos experimentales y simulados para las diferentes longitudes, obteniendo así un valor promedio de las medidas obtenidas. Por ende, también agregó la desviación típica que elucida una idea de la dispersión de las medidas.

Algunas veces es más conveniente utilizar el error relativo, dado que este es un número sin dimensiones, y representa la proporción del valor total de la magnitud medida que se ve afectada por el error (Gallego, 2004).

Discusión

En los experimentos realizados, el tiempo " t " del péndulo fue la variable independiente mientras que el ángulo θ del péndulo es la variable dependiente. Al hacer las gráficas, el tiempo que es la variable dependiente tomó el eje de abscisas, mientras que el ángulo del péndulo tomó en el eje de ordenadas.

Después de trazar las gráficas, hubo poca dispersión de las coordenadas debido a los errores experimentales o a causa del error de truncamiento en el caso de la aproximación por RK4, por lo que se trazaron las barras de error. Para verificar que las barras de error no fueran mayores a un error del 5% (Solís, 2022) y a que su vez tuvieran un valor aproximado de la frecuencia de oscilación del péndulo. Adicionalmente, mediante el ajuste sinusoidal se logra verificar que este estuvo en concordancia con MAS observado en los experimentos y en el comportamiento de la simulación. Así mismo, esto fue corroborado con la cercanía de los valores

numéricos de la frecuencia obtenidos de los experimentos y los calculados mediante la simulación, los cuales se presentan en la Tabla 3.

Los valores de la gravedad calculados y presentados en la Tabla 4, al ser calculados con la Ecuación (3), se demostró que la masa del péndulo no influye en su aceleración debido a que los valores obtenidos tienen un error relativo del 0.06%.

A pesar de que el experimento se realizó para mantener los errores al mínimo, todavía hubo algunos errores sistemáticos y aleatorios en el experimento. Por lo que para lograr una mejoría en el video análisis se propone utilizar se usen elementos que se puedan distinguir de mejor manera, por ejemplo, objetos de colores más nítidos rojo o azul, esto con el fin de que el software Tracker se le dificulte menos su rastreo.

En cuanto a la simulación numérica, los datos indican a que el uso de un tamaño de paso h poco adecuado como es el caso de un h muy pequeño, que hace que al hacer un mayor número de iteraciones este induzca un error de redondeo, que con cada iteración este cada vez se hará más grande. Y en el caso donde h es muy grande, se harán muy pocas iteraciones, por lo que el ajuste de aproximación al resultado real será muy bajo. Por lo tanto, para una mejor aproximación se puede usar un método de tamaño de paso variable, donde el usuario pueda especificar una tasa de error límite aceptable y el procedimiento recursivo intentará ajustar el tamaño del paso, de tal manera que cada paso no exceda el límite.

Respecto al valor obtenido derivado de los experimentos $g = (9.804 \pm 0.0129) \text{ m/s}^2$ si lo comparamos con otros trabajos, por ejemplo, el de Martínez (2015), donde obtiene $g = (9.757 \pm 0.003) \text{ m/s}^2$ utilizando también el experimento del péndulo simple, ambos valores son muy cercanos al valor estándar de g . La diferencia aquí

es que en este trabajo se utiliza un sensor dentro de un modelo específico de un celular (Samsung modelo GT-I9505), el cual puede monitorear con buena certidumbre el movimiento de la masa que péndula. Aun así, podemos notar que nuestra aproximación es buena por que se deriva de un video análisis que utiliza cualquier celular capaz de grabar un video exportable que se pueda cargar en el programa libre Tracker. Además, el programa Tracker es muy sencillo de utilizar y utiliza otros conceptos como el escalamiento de un video, sistema internacional de unidades y conversiones de unidades los cuales son integrales para el estudio cinemático del MAS del péndulo.

Conclusiones

1. Se verificó que las técnicas de video análisis son útiles para comprobar la cinemática movimiento del péndulo el cual es un MAS. Además, los resultados analizados experimentalmente son congruentes con la teoría de la mecánica para el MAS.
2. La comparación de las curvas de ángulo versus tiempo provee resultados satisfactorios para el experimento del péndulo, los cuales al ser comparados con la simulación numérica desarrollada em Python empatan de forma muy exitosa.
3. El cálculo de la aceleración de la gravedad resultó en un valor muy cercano de $g = (9.804 \pm 0.0129) \text{ m/s}^2$ derivado de nuestros experimentos y simulación para el péndulo simple en la aproximación de ángulos pequeños. Debido a esta buena aproximación, la metodología seguida en este trabajo es un procedimiento óptimo y que es validado por sí mismo. Por lo que puede seguirse como metodología en prácticas de laboratorio de física de las carreras de Ing. Física, Mecánica Eléctrica, entre otras.

4. Estos experimentos al ser replicables son de gran utilidad para la Física Educativa con un enfoque en el uso de tecnologías de la información y comunicación (TICS) como lo es el programa Tracker y elementos sencillos como el celular inteligente y el video análisis.

Referencias bibliográficas

Al-Baali, M., & Fletcher, R. (1985). *Variational methods for non-linear least-squares*. Journal of the Operational Research Society, 36(5): 405-421.

Amemiya, T. (1983). *Non-linear regression models. Handbook of econometrics*, 1: 333-389.

Brown D. (2022). *Tracker Video Analysis and Modeling Tool*, <http://physlets.org/tracker/>

Sitio visto en octubre de 2022.

Celaya, E. A. (2013). *Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales rígidas: aplicación a la semidiscretización del método de elementos finitos* (Doctoral dissertation, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea).

Gallego, C. F. (2004). *Cálculo del tamaño de la muestra*. Matronas profesión, 5(18): 5-13.

Garzón, G. P. A. R., & Villate, M. A. M. (2022). *Uso de Tracker como herramienta de análisis en experimentos caseros para el aprendizaje de la física mecánica*. Revista Educación en Ingeniería, 17(34): 1-17.

Harris, C.R., Millman, K.J., van der Walt, S.J., (2020). *Array programming with NumPy*. Nature No. 585: 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.

Hunter, J. D. (2007). *Matplotlib: A 2D graphics environment*. Computing in science & engineering, 9(03): 90-95.

Jakobsen, E. A. (2021). *Obtaining Numerical Solutions to Ordinary Differential Equations on Differentiable Manifolds with Lie Group Integrators* (Master's thesis, NTNU).

Jacquelin, J. (2009). *Régressions et équations intégrales*. Scribd, San Francisco, CA, Accessed Aug, 8, 2019.

Landau, R. H., Paéz, M. J., & Bordeianu, C. C. (2007). *Computational physics*. Computer Languages, 7: 2-3.

Martínez Pérez J.E. (2015). *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 12(2):341-346.

McKinney, W. (2012). *Python for data analysis: Data wrangling with Pandas, NumPy, and IPython*. "O'Reilly Media, Inc."

Newton, I. (1687). *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Vol. 1).

Novalés, A. (2010). *Análisis de regresión*. Universidad Complutense de Madrid: Madrid, Spain: 116.

Ramli, M. H., Chan, K. T., & Yap, W. F. (2016). *Study of simple pendulum using Tracker video analysis and high speed camera: an interactive approach to analyze oscillatory motion*. Solid State Science and Technology, 24(01): 297-305.

Serway, R.A. & Jewett, J.W. (2009). *Física para ciencias e ingeniería Volumen 1 Séptima Edición*. Cengage learning.

Solís, E. (2022). *Estudio cinemático del péndulo simple por técnica de video análisis y comparación por simulación numérica* (Tesis de licenciatura). Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo, Coahuila.

Team, T. P. D. (2020). *pandas-dev/pandas: Pandas (latest)*. doi:10.5281/zenodo.

Van Rossum, G., & Drake Jr, F. L. (1995). *Python reference manual*. Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam.

Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (No. TA340. P76 2007.). México: Pearson educación.

Yuningsih N., Sardjito S., Dewi Y.C. (2020). *Determination of earth's gravitational acceleration and moment of inertia of rigid body using physical pendulum experiments*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.

Zill, D. G., Hernández, A. E. G., & López, E. F. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (No. 970-686-487-3.). Thomson Learning.

Zeigler, B. P., Muzy, A., & Kofman, E. (2018). *Theory of modeling and simulation: discrete event & iterative system computational foundations*. Academic press.

Apéndice I

Deducción suplementaria de la Ecuación Diferencial Ordinaria

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \quad (1)$$

Que tiene soluciones de la forma:

$$\theta(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

Escribiendo en función de senos y cosenos las exponenciales complejas:

$$c_1 e^{i\omega t} = c_1 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)], \quad (2.1)$$

$$c_2 e^{-i\omega t} = c_2 [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)], \quad (2.2)$$

Y al sustituir las ecuaciones (2.1) y (2.2) en la ecuación (2) obtenemos:

$$\theta(t) = c_1 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] + c_2 [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)], \quad (2.a)$$

Y al expandir la ecuación (2.a) para después agrupar en términos de senos y cosenos, se consigue:

$$\theta(t) = (c_1 + c_2) \cos(\omega t) + (c_1 - c_2) i \sin(\omega t), \quad (2.b)$$

Hacemos que $c_1 + c_2 = C_1$ y $c_1 - c_2 = C_2$, por lo que:

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 i \sin(\omega t), \quad (2.b.1)$$

Incluimos el factor $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

$$\theta(t) = \frac{A}{A} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 i \sin(\omega t)], \quad (2.b.2)$$

$$\theta(t) = A \left[\frac{C_1}{A} \cos(\omega t) + \frac{C_2}{A} i \sin(\omega t) \right], \quad (2.b.3)$$

Y sustituyendo el valor de A,

$$\theta(t) = A \left[\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos(\omega t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} i \sin(\omega t) \right], \quad (2.b.4)$$

Y observando el triángulo rectángulo de la figura A del para la obtención los ángulos.

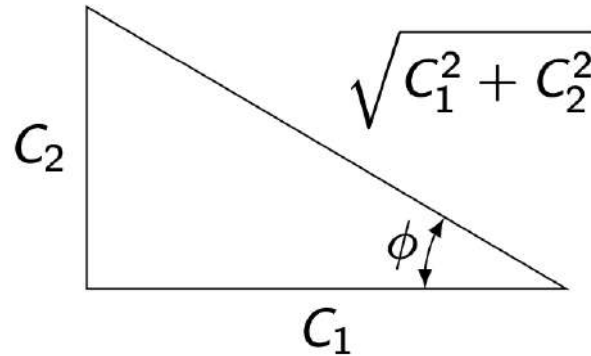


Figura A. Triángulo rectángulo para referencia de la localización de las constantes C_1 y C_2 , así como del valor de la hipotenusa calculada a partir de los dos catetos. Fuente: Elaboración propia.

Por lo que podemos obtener el seno y coseno:

$$\cos \phi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad (3)$$

$$\sin \phi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad (4)$$

Y al hacer la sustitución de las ecuaciones (3) y (4) en la ecuación (2.b.4) se obtiene:

$$\theta(t) = \sin \phi \cos(\omega t) + \cos \phi \sin(\omega t)], \quad (2.b.5)$$

Y haciendo uso de la siguiente identidad trigonométrica,

$$\sin(\omega t \pm \phi) = \sin(\omega t) \cos \phi \pm \cos(\omega t) \sin \phi, \quad (5)$$

Por lo que al hacer la sustitución de la ecuación (5) en la ecuación (2.b.5) se tiene:

$$\theta(t) = \sin(\omega t + \phi). \quad (2.b.6)$$

Apéndice II

Código de la simulación del Péndulo Simple en lenguaje Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Función objetivo
def a(theta):
    return (g/l)*theta

# Asignar valores a las variables conocidas
l = 0.3 # m longitud del péndulo
g = -9.81 # m/s**2 gravedad terrestre
ttot = 3 # Tiempo total de ejecución
angulo_inicial = 9 # Angulo inicial en grados
h = 0.00025 # Tamaño de paso h

# Colocar valores iniciales a las variables
t = np.arange(0, ttot, h)
n = len(t)
y = np.zeros(n)
v = np.zeros(n)
y[0] = np.radians(angulo_inicial)
v[0] = np.radians(0.0)

# Runge-Kutta de Orden 4
for i in range(0, n-1):
    k1_y = h*v[i]
    k1_v = h*a(y[i])

    k2_y = h*(v[i]+0.5*k1_v)
    k2_v = h*a(y[i]+0.5*k1_y)

    k3_y = h*(v[i]+0.5*k2_v)
```

$$k3_v = h * a(y[i] + 0.5 * k2_y)$$

$$k4_y = h * (v[i] + k3_v)$$

$$k4_v = h * a(y[i] + k3_y)$$

$$y[i+1] = y[i] + (k1_y + 2 * k2_y + 2 * k3_y + k4_y) / 6.0$$

$$v[i+1] = v[i] + (k1_v + 2 * k2_v + 2 * k3_v + k4_v) / 6.0$$

Impresión de las gráficas

```
fig = plt.figure(figsize=(8, 7))
```

```
ax = fig.add_axes([0.15, 0.1, 0.8, 0.8])
```

Grafica de la trayectoria del péndulo

```
ax.plot(t, y, color='blue', linestyle='-')
```

Colocar las barras de error

```
ax.errorbar(t, y, yerr=0.005, ecolor='red', elinewidth=1, capsize=1,  
            errorevery=100, linestyle='')
```

```
ax.set_title('Péndulo Simple' + r'$l = $' + str(l) + ' cm')
```

```
ax.set_xlabel('Tiempo (s)', fontsize=10)
```

```
ax.set_ylabel('Ángulo (rad)', fontsize=10)
```

```
ax.grid(True)
```

```
plt.show()
```