

ORIGEN DEL GRUPO D_4 EN EL ORBIFOLD Z_2 : UNA PUERTA PARA CONOCER LA IMPORTANCIA DE LOS GRUPOS Y ORBIFOLDS EN LA FÍSICA

ORIGIN OF THE DIHEDRAL GROUP D_4 IN THE Z_2 ORBIFOLD: A DOOR TO KNOW THE IMPORTANCE OF GROUPS AND ORBIFOLDS IN PHYSICS

RICARDO PÉREZ MARTÍNEZ

RESUMEN

Los grupos discretos y los orbifolds son estructuras matemáticas que desempeñan un papel clave en la teoría de cuerdas y su conexión con la física de partículas, proporcionando una base geométrica y algebraica para comprender simetrías y aspectos fundamentales de las teorías físicas. En este trabajo analizamos el origen del grupo diedral D_4 en un contexto de compactificación de cuerdas en orbifolds, destacando su relevancia en la descripción de la jeraquía de masas y en la construcción de modelos de sabor en física de partículas.

Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas, Unidad
Sureste, UAdeC.

Palabras clave: grupos; orbifolds; cuerdas; compactificación; física de partículas.

ABSTRACT

Discrete groups and orbifolds are mathematical structures that play a key role in string theory and its connection with particle physics, providing a geometric and algebraic basis for understanding symmetries and fundamental aspects of physical theories. In this work, we analyze the origin of the D_4 dihedral group in the context of orbifold compactification of strings, highlighting its relevance for describing the mass hierarchy and for constructing flavor models in particle physics.

Correspondencia

ricardo.perezmartinez@uadec.edu.mx
<https://orcid.org/0000-0003-2923-4970>

Fecha de recepción
13 de noviembre de 2024.

Fecha de aceptación
15 de enero de 2025.

Keywords: *groups; orbifolds; strings; compactification; particle physics.*

1. INTRODUCCIÓN

Los grupos son estructuras algebraicas que nos ayudan a estudiar y describir las simetrías de un objeto o un sistema físico, así como a entender sus implicaciones. Es usualmente conocido que las transformaciones de simetría (rotaciones y reflexiones) de un polígono regular forman el llamado grupo diedral o grupo diédrico. Un caso particular es el grupo diedral D_4 , el cual se obtiene por las transformaciones de simetría del cuadrado (Ramond, 2010).

Los grupos tienen aplicaciones importantes en la física de partículas. En este campo existe un modelo llamado el Modelo Estándar (ME), el cual describe las partículas elementales y sus interacciones. El ME está formado por fermiones (leptones y cuarks), el bosón de Higgs y bosones de norma, los cuales son los mediadores de las interacciones fundamentales. Los fermiones están agrupados en tres generaciones o familias, por ejemplo, para los leptones la primera generación está formada por el electrón y el neutrino del electrón, mientras que el cuark top y el cuark down forman la primera generación de cuarks. En el sector de Yukawa del ME se presentan las interacciones entre los fermiones con el campo de Higgs. Mediante el rompimiento espontáneo de la simetría, o mecanismo de Higgs, los fermiones adquieren masas, las cuales dependen del valor de expectación en el vacío del Higgs y de parámetros libres como los acoplamientos de Yukawa (Langacker, 2017). Tales parámetros se ajustan a las observaciones experimentales, las cuales indican un patrón de jerarquía entre las masas de los fermiones. Por ejemplo, los fermiones de la tercera generación son más pesados que los de la primera. Esto un aspecto que el ME no explica, es decir, por qué los fermiones tienen tales valores de masa. Esto forma parte de un problema en física más allá del ME llamado el problema del sabor (Langacker, 2017; Zupan, 2019). Una de las propuestas para explicar este problema es considerar grupos discretos no Abelianos como el grupo diedral D_4 , el grupo de permutaciones S_3 , entre otros (Ishimori y col., 2010; Hernández y col., 2022; Miskaoui, 2024). A los



grupos utilizados en este contexto se les suele llamar grupos de sabor, donde la palabra sabor se refiere a los distintos tipos o sabores de fermiones del ME.

El origen de algunos de estos grupos puede presentarse en las propiedades geométricas y algebraicas de los orbifolds usados en las compactificaciones de cuerdas (Kobayashi y col., 2007; Nilles y col., 2012; Ramos-Sánchez y Vaudrevange, 2019). Una teoría de cuerdas como la cuerda heterótica está definida en diez dimensiones (Gross y col., 1985). Para hacer contacto con nuestro mundo en cuatro dimensiones es necesario compactificar seis dimensiones en un orbifold (Dixon y col., 1985). La geometría del orbifold determina las propiedades de los modelos en cuatro dimensiones que provienen de las compactificaciones de cuerdas (Ramos-Sánchez, 2009) y también ofrecen un origen a grupos de sabor (Olguín-Trejo y col., 2018). Además de los orbifolds, existen otros espacios para efectuar la compactificación de cuerdas, por ejemplo, toros y espacios de Calabi-Yau. Los primeros no reproducen la propiedad de quiralidad de los fermiones del ME, mientras que los segundos son más complejos matemáticamente (Ramos-Sánchez, 2009). Los orbifolds, por otra parte, si reproducen la quiralidad de los fermiones y son geoméricamente más simples. Por estas razones nos enfocamos a los orbifolds.

El grupo diedral D_4 es especial en el contexto de los orbifolds y los grupos por las siguientes razones. La primera es que este grupo es usualmente obtenido por las simetrías del cuadrado (Ramond, 2010), la segunda es que ha sido aplicado para explorar el problema del sabor en la física de partículas (Ishimori y col., 2008; Hernández y col., 2022; Srivastava y col., 2022), y la tercera es que puede originarse en un orbifold con una geometría accesible de visualizar (Kobayashi y col., 2007), ilustrando así, un origen distinto al usual para este grupo. Por estas razones nos enfocamos al grupo D_4 en este artículo con los objetivos siguientes. Primero, mostrar que el grupo diedral D_4 puede originarse en el orbifold Z_2 unidimensional (Kobayashi y col., 2007). Segundo, dar a conocer la importancia de los orbifolds y los grupos en



el contexto de las compactificaciones de cuerdas y la física de partículas, en particular en el problema del sabor.

El contenido del presente artículo es el siguiente. En la sección 2 se presentan algunas definiciones y propiedades de los grupos, además de mostrar el grupo diedral D_4 . En la sección 3 hablamos de los orbifolds y las herramientas para obtener el grupo de sabor asociado a un orbifold. En la sección 4 mostramos cómo surge el grupo diedral D_4 en el orbifold Z_2 unidimensional. En la sección 5 comentamos sobre la importancia de los orbifolds y los grupos en las compactificaciones de cuerdas y en la física de partículas. Finalmente, en la sección 5 presentamos las conclusiones.

2. GRUPOS

Un grupo es un conjunto de elementos $G = \{g_0, g_1, g_2, \dots\}$, donde una operación producto, denotada por \circ , está definida entre sus elementos y tal que se cumplen las siguientes propiedades:

- a) La operación \circ es cerrada, es decir, el producto de dos elementos en G nos da un tercer elemento que pertenece a G . Por ejemplo, $g_1 \circ g_2 = g_3$, donde g_1, g_2, g_3 son elementos de G .
- b) La operación \circ es asociativa, es decir, el resultado del producto de tres elementos de G no depende de la asociación de dos de ellos. Por ejemplo, $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$, donde g_1, g_2, g_3 son elementos de G .
- c) Existe un elemento identidad $g_0 = e$, tal que $g_i \circ e = g_i$, para todo g_i en G .
- d) Cada elemento g_i en G tiene su inverso g_i^{-1} en G tal que $g_i \circ g_i^{-1} = e$.

Un grupo es no Abelianiano si $g_i \circ g_j \neq g_j \circ g_i$, para al menos dos elementos g_i, g_j de G , de otra forma es un grupo Abelianiano. Si los elementos de G no dependen de parámetros que varían en forma



continua en un intervalo de valores se dice que el grupo es discreto. Un grupo es finito si el número de sus elementos es finito.

Un ejemplo de grupo discreto Abeliano es el grupo cíclico $Z_2 = \{e, a\}$, donde a es el generador del grupo y cumple $a^2 = e$. Se dice entonces que el elemento a es de orden dos. La regla de multiplicación del grupo Z_2 está dada en la Tabla 1.

Tabla 1. Regla de multiplicación del grupo Z_2 .

| | | |
|---------|-----|-----|
| \circ | e | a |
| e | e | a |
| a | a | e |

Esto indica que $e \circ e = e$, $e \circ a = a$, $a \circ e = a$ y $a \circ a = a^2 = e$. En este caso el elemento a es su propio inverso pues a es de orden dos.

Los elementos de un grupo G se pueden clasificar en clases de conjugación, las cuales están formadas por elementos de G que son conjugados entre sí. Dos elementos g y g' son conjugados con respecto a otro elemento h de G si se cumple que $h \circ g \circ h^{-1} = g'$. Las clases de conjugación no tienen elementos en común y la clase trivial la forma el elemento identidad. De esta forma la unión de clases de conjugación resulta en todos los elementos del grupo G .

Una representación matricial del grupo G es un mapeo de los elementos g a matrices $U(g)$ en un espacio vectorial V de dimensión igual al tamaño de las matrices $U(g)$ y tal que se cumplen las siguientes dos propiedades:

- i) $U(e) = \mathbb{1}$, donde $\mathbb{1}$ es la matriz identidad en V .
- ii) Si $g_1 \circ g_2 = g_3$ en G , entonces $U(g_1) * U(g_2) = U(g_3)$ en V , donde $*$ indica la multiplicación de matrices.

Una representación matricial en un espacio vectorial V en dos dimensiones para este grupo Z_2 es $\{U(e), U(a)\}$, donde



$$U(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Otras opciones para $U(a)$ son,

$$U(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cada una de estas tres representaciones para el elemento a de Z_2 cumple $U(a) * U(a) = U(a)^2 = U(e) = \mathbb{1}$. Por lo tanto, el conjunto de matrices $K = \{U(e), U(a)\}$, donde $U(a)$ es cualquiera de las tres matrices presentadas anteriormente, forman un grupo Z_2 . Es directo verificar que estos elementos cumplen la regla de multiplicación de Z_2 .

2.1 GRUPO DIEDRAL D_4

El grupo diedral D_4 es el grupo de simetrías del cuadrado bajo las siguientes transformaciones: rotaciones de 90° con respecto a su centro y reflexiones con respecto a sus cuatro ejes de simetría, los cuales se muestran en la Figura 1. Este conjunto de transformaciones cumple las propiedades que definen a un grupo, el cual es conocido como el grupo diedral o diédrico D_4 . Este grupo tiene ocho elementos que denotamos por

$$D_4 = \{e, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\},$$

donde e denota al elemento identidad, las rotaciones corresponden a $\rho_i, i = 1, 2, 3$, y las reflexiones a $\sigma_j, j = 1, 2, 3, 4$. Se cumple que $\rho_1^4 = e$ y que $\sigma_j^2 = e$ para $j = 1, 2, 3, 4$. Esto nos dice que la rotación ρ_1 de 90° es de orden cuatro, y que cada una de las reflexiones σ_j son de orden dos.



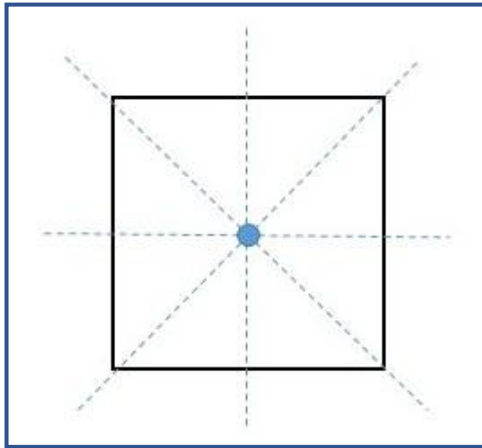


Figura 1. Geométricamente el grupo diedral D_4 surge por las transformaciones de simetría del cuadrado: rotaciones de 90° con respecto a su centro, y reflexiones respecto a sus cuatro ejes de simetría mostrados con líneas punteadas.

La regla de multiplicación del grupo D_4 se presenta en la **Tabla 2**, la cual nos dice el resultado de multiplicar elementos de D_4 . Por ejemplo, $\sigma_1 \circ \sigma_3 = \rho_2$, $\rho_3 \circ \sigma_4 = \sigma_3$, etc. Notamos que no todos los elementos conmutan, por ejemplo, $\sigma_4 \circ \rho_1 = \sigma_3$, mientras que $\rho_1 \circ \sigma_4 = \sigma_1$. Por lo tanto, el grupo D_4 es un grupo no Abelian.

Tabla 2. Regla de multiplicación del grupo D_4 .

| \circ | e | ρ_1 | ρ_2 | ρ_3 | σ_1 | σ_2 | σ_3 | σ_4 |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| e | e | ρ_1 | ρ_2 | ρ_3 | σ_1 | σ_2 | σ_3 | σ_4 |
| ρ_1 | ρ_1 | ρ_2 | ρ_3 | e | σ_2 | σ_3 | σ_4 | σ_1 |
| ρ_2 | ρ_2 | ρ_3 | e | ρ_1 | σ_3 | σ_4 | σ_1 | σ_2 |
| ρ_3 | ρ_3 | e | ρ_1 | ρ_2 | σ_4 | σ_1 | σ_2 | σ_3 |
| σ_1 | σ_1 | σ_4 | σ_3 | σ_2 | e | ρ_3 | ρ_2 | ρ_1 |
| σ_2 | σ_2 | σ_1 | σ_4 | σ_3 | ρ_1 | e | ρ_3 | ρ_2 |
| σ_3 | σ_3 | σ_2 | σ_1 | σ_4 | ρ_2 | ρ_1 | e | ρ_3 |
| σ_4 | σ_4 | σ_3 | σ_2 | σ_1 | ρ_3 | ρ_2 | ρ_1 | e |

Una representación matricial en un espacio vectorial V de dos dimensiones para el grupo D_4 es la siguiente (Ishimori et al., 2010),

$$\begin{aligned}
 U(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(\rho_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\rho_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U(\rho_3) = \\
 &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 U(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\sigma_4) = \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Esta representación cumple, obviamente, las propiedades que definen a una representación del grupo, es decir, $U(e) = \mathbb{1}$ (la matriz identidad), y $U(g_1) * U(g_2) = U(g_3)$ en V si $g_1 \circ g_2 = g_3$ en D_4 . Por ejemplo,

$$U(\sigma_2) * U(\sigma_1) = U(\rho_1), \quad U(\rho_3) * U(\sigma_3) = U(\sigma_2),$$

lo cual está en acuerdo con los productos $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \rho_1$ y $\rho_3 \circ \sigma_3 = \sigma_2$ en D_4 mostrados en la Tabla 2.

El origen del grupo D_4 por las transformaciones de simetría del cuadrado brinda una conexión importante entre un objeto con geometría usual y la estructura algebraica de un grupo. En la siguiente sección mostramos un origen distinto para este grupo usando las propiedades geométricas y algebraicas de un orbifold.

3. ORBIFOLD

Un orbifold toroidal Abeliano en d dimensiones se define mediante la relación

$$O = \frac{T}{P},$$

donde T es el toro en d dimensiones y P es el grupo de punto, que en nuestro caso corresponde al grupo cíclico Z_N . El toro T se define por

$$T = \frac{R}{\Lambda},$$



donde R es el espacio real en d dimensiones y Λ es la retícula del toro T definida por

$$\Lambda = \{n_i e_i, n_i \in \mathbb{Z}\},$$

donde e_i , con $i = 1, 2, \dots, d$, son los vectores base de la retícula Λ . El grupo de punto $P = \mathbb{Z}_N$ debe ser una simetría de la retícula del toro.

Una manera alternativa de definir al orbifold está dada por

$$O = \frac{R}{S},$$

donde S es el grupo de espacio, el cual está formado por el grupo de punto $P = \mathbb{Z}_N$ y por las traslaciones $n_i e_i$ en la retícula Λ del toro. Los elementos de S son denotados por $g = (\vartheta, \lambda)$, donde ϑ es un elemento de $P = \mathbb{Z}_N$, y $\lambda = n_i e_i$ es una traslación en la retícula. El producto de dos elementos en S está definido mediante

$$g_1 g_2 = (\vartheta_1, \lambda_1)(\vartheta_2, \lambda_2) = (\vartheta_1 \vartheta_2, \vartheta_1 \lambda_2 + \lambda_1).$$

La definición del toro establece que las coordenadas x de R están relacionadas por

$$x' = x + n_i e_i,$$

mientras que la definición del orbifold indica que los elementos g del grupo de espacio S actúan sobre las coordenadas x de R mediante la identificación

$$x' = gx = (\vartheta, n_i e_i)x = \vartheta x + n_i e_i.$$

En el orbifold se pueden tener puntos fijos cuando $x' = x$ en la expresión anterior. De esta forma los puntos fijos están dados por

$$x = (1 - \vartheta)^{-1} n_i e_i$$

El elemento $g = (\vartheta, n_i e_i)$ de S asociado a un punto fijo x se le llama elemento constructor. Por la relación de conjugación en el grupo de espacio S se tiene que el elemento $g = (\vartheta, \lambda)$ es conjugado de $g' = (\vartheta, \lambda + \Omega)$, donde a $\Omega = (1 - \vartheta)\Lambda$ se le conoce como la retícula



invariante de los puntos fijos. Entonces, dos elementos de S son conjugados si difieren por una traslación en la retícula invariante de los puntos fijos.

3.1 ORBIFOLD Z_2 UNIDIMENSIONAL

En este orbifold el grupo de punto P es el grupo cíclico $Z_2 = \{e, a\}$, donde $a^2 = e$. Al elemento a se le llama el generador del grupo. Una representación unidimensional de Z_2 es $e = 1$ y $a = -1$. Este grupo puede relacionarse a una reflexión de x a $-x$. Por ejemplo, el punto x es enviado a su reflejo $-x$ mediante la acción del elemento a de Z_2 sobre x , es decir, $ax = -x$

La retícula del toro es $\Lambda = \{n_1 e_1\}$, donde n_1 es un número entero, y $e_1 = 1$ por simplicidad. De la definición del toro se tiene la identificación

$$x' = x + n_1 e_1,$$

lo cual nos dice que todos los puntos x en el espacio real unidimensional R que difieren por una traslación $n_1 e_1$ denotan el mismo punto en el toro. Esto es equivalente a la geometría del círculo como se muestra en la Figura 2. Notamos que la reflexión efectuada por Z_2 es una simetría de la retícula del toro unidimensional, razón por la cual hemos elegido al grupo de punto P como Z_2 .

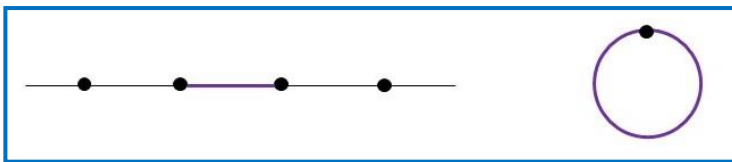


Figura 2. Geometría del toro unidimensional. A la izquierda se muestra la retícula del toro, donde cada punto es identificado a sí mismo en el toro. Esto representa la geometría del círculo. El dominio fundamental del toro se muestra resaltando la longitud entre dos puntos adyacentes en la figura de la izquierda y corresponde a la circunferencia del círculo.

El orbifold Z_2 en una dimensión está dado por

$$O = \frac{T}{Z_2}.$$

Esto nos dice que aplicamos una simetría de reflexión Z_2 al toro unidimensional (el círculo). ahora los puntos x en R están relacionados por

$$x' = ax + n_1 e_1 = -x + n_1 e_1,$$

donde hemos usado que $a = -1$, el elemento no trivial de Z_2 . Al realizar esta identificación obtenemos el orbifold Z_2 , donde los dos puntos que quedan inalterados ante esta reflexión son llamados puntos fijos. Una manera ilustrativa de ver esto se muestra en la **Figura 3**.

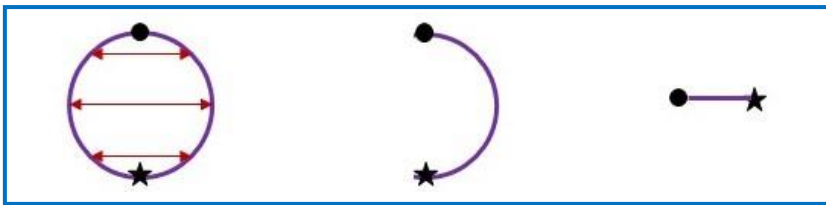


Figura 3. El orbifold Z_2 se obtiene al aplicar una simetría discreta de reflexión Z_2 al círculo (toro en una dimensión). La geometría de este orbifold es un semicírculo. El dominio fundamental del orbifold es ahora la mitad del dominio fundamental del círculo, y está acotado por dos puntos fijos denotados por una estrella y un punto.

3.2 ELEMENTOS PARA DETERMINAR EL GRUPO QUE RESULTA DEL ORBIFOLD Z_2

Los principales elementos que determinan al grupo que surge de la geometría de un orbifold son los puntos fijos y la regla de selección del grupo de espacio, los cuales presentamos enseguida.

3.2.1 Puntos fijos

En el orbifold Z_2 unidimensional los puntos fijos están dados por



$$x = \frac{n_1}{2},$$

donde n_1 es un entero. Existe un número infinito de puntos fijos, pero solo dos puntos fijos son inequivalentes en el orbifold. Para entender esto, recordemos que a cada punto fijo x le corresponde un elemento g del grupo de espacio S llamado elemento constructor. Los elementos de S para el orbifold Z_2 se pueden clasificar en dos clases de conjugación. Todos los elementos en una clase son elementos conjugados y denotan al mismo punto fijo en el orbifold. Por lo tanto, al tener dos clases de conjugación en S se tienen dos puntos fijos inequivalentes en el orbifold Z_2 . Por esta razón, hablamos de dos puntos fijos (inequivalentes), y una muestra representativa de ellos se aprecia en la Figura 3, por ejemplo el punto y la estrella que podemos asociar a $x = 0$ con $n_1 = 0$, y $x = \frac{1}{2}$ con $n_1 = 1$, respectivamente. De esta manera, los dos elementos constructores para los dos puntos fijos se pueden denotar por

$$g = (a, m_1 e_1),$$

donde $a = -1$ y $m_1 = 0, 1$.

3.2.2 Regla de selección del grupo de espacio

La regla de selección del grupo de espacio establece que el producto de n elementos constructores g de S debe ser trivial, es decir,

$$\prod_{j=1}^n g_j = (1, 0),$$

donde $g_j = (a^{(j)}, m_1^{(j)} e_1)$ denota los elementos constructores para los puntos fijos en el orbifold Z_2 , y $(1, 0)$ es el elemento identidad en el grupo de espacio S . Por las relaciones de conjugación para los elementos de S , se tiene que el elemento $(1, 0)$ es equivalente a $(1, 0 + \Omega)$ donde Ω es la retícula invariante de los puntos fijos. En el orbifold Z_2 se tiene que $\Omega = (1 - a)n_1 e_1 = 2m$, donde m denota un número entero, es decir Ω está formada por todos los números pares. De esta



manera, la regla de selección del grupo de espacio aplicada al orbifold Z_2 se puede escribir como

$$\prod_{j=1}^n g_j = \prod_{j=1}^n (a^{(j)}, m_1^{(j)} e_1) = (1, 2m),$$

con m un número entero. Al aplicar la regla de multiplicación para los elementos del grupo de espacio es posible obtener el elemento que resulta de los n productos de elementos constructores. En esta parte es conveniente separar la parte rotacional y traslacional, y analizar las condiciones que se deben cumplir para ser consistentes con la regla de selección del grupo de espacio.

4. ORIGEN DEL GRUPO D_4 EN EL ORBIFOLD Z_2

En esta sección aplicamos las herramientas expuestas en la sección 3.2 para obtener el grupo que resulta del orbifold Z_2 . Nos centramos entonces en los puntos fijos y en la regla de selección del grupo de espacio.

De la parte geométrica notamos que este orbifold tiene dos puntos fijos inequivalentes, como se mostró en la Figura 3. El intercambio de ellos es una simetría del orbifold, ya que su geometría sigue siendo la misma. Esta simetría da lugar al grupo de permutaciones S_2 , el cual tiene dos elementos, la identidad e y un elemento b tal que $b^2 = e$. El grupo S_2 es algebraicamente igual al grupo Z_2 , es decir, cumple la misma regla de multiplicación.

Veamos ahora lo que establece la regla de selección del grupo de espacio. La parte rotacional da la condición

$$a^n = 1,$$

lo cual implica que $n = 2m$, donde m es un número entero. Esto define a un grupo Z_2 .



La parte traslacional presenta la condición

$$m_1^{(1)} + m_1^{(2)} + \dots + m_1^{(n)} = 2m,$$

Esto da lugar a otro grupo Z_2 , el cual denotamos por Z_2' para diferenciarlo en notación con el grupo Z_2 de la parte rotacional. Se tiene que el grupo que resulta de la regla de selección del grupo de espacio es $Z_2 \times Z_2'$, llamado el producto directo de Z_2 con Z_2' .

De esta forma, hemos obtenido un grupo de permutaciones S_2 por los dos puntos fijos, y un grupo $Z_2 \times Z_2'$ por la regla de selección del grupo de espacio. El grupo que resulta del orbifold Z_2 está dado por la clausura multiplicativa de S_2 con $Z_2 \times Z_2'$. Esto da origen al grupo diedral D_4 a partir de la geometría del orbifold Z_2 en una dimensión (Kobayashi y col., 2007).

Una manera de notar lo anterior es la siguiente. Sean σ_1, ρ_2 y σ_4 los elementos que generan los grupos S_2, Z_2 y Z_2' , respectivamente. Se cumple entonces que $g^2 = e$, para $g = \sigma_1, \rho_2, \sigma_4$. Ahora consideremos la siguiente representación de dimensión dos para cada uno de estos tres elementos,

$$U(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\rho_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U(\sigma_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notamos que, efectivamente, se cumple $U(g) * U(g) = U(g)^2 = \mathbb{1} = U(e)$, para $g = \sigma_1, \rho_2, \sigma_4$, y donde $\mathbb{1}$ denota la matriz identidad de dimensión dos. Esto muestra que cada una de estas tres matrices generan un grupo S_2, Z_2 y Z_2' , respectivamente. La clausura multiplicativa de S_2 con $Z_2 \times Z_2'$ indica realizar los productos entre los tres generadores para obtener un conjunto G de un cierto número n elementos que sea cerrado, es decir, que el producto de cualesquiera de estos n elementos de como resultado un elemento que pertenece al conjunto G . Este conjunto de n elementos da lugar al grupo G que resulta del orbifold Z_2 .

Explícitamente, a partir de los tres elementos generadores $U(\sigma_1), U(\rho_2)$ y $U(\sigma_4)$ se tienen los siguientes resultados,



$$U(\sigma_1) * U(\rho_2) = U(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\sigma_1) * U(\sigma_4) = U(\rho_1) \\ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U(\rho_2) * U(\sigma_4) = U(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(\sigma_4) * U(\sigma_1) = U(\rho_3) \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, se obtiene un conjunto G de ocho elementos que es cerrado bajo la operación de multiplicación de matrices. Este conjunto está dado por,

$$G = \{U(e), U(\rho_1), U(\rho_2), U(\rho_3), U(\sigma_1), U(\sigma_2), U(\sigma_3), U(\sigma_4)\}.$$

Se tiene que los elementos de G cumplen la regla de multiplicación del grupo D_4 presentada en la Tabla 2. Por ejemplo,

$$U(\rho_3) * U(\sigma_2) = U(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\rho_1) * U(\rho_3) = U(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Por lo tanto, el grupo que resulta de la geometría del orbifold Z_2 unidimensional es $G = D_4$, el grupo diedral de ocho elementos. Esto representa un origen distinto para el grupo D_4 mediante las propiedades geométricas y algebraicas del orbifold Z_2 . Resulta que los orbifolds y los grupos tienen aplicaciones importantes en el contexto de las compactificaciones de cuerdas y la física de partículas. De esto platicamos en la siguiente sección.

5. ORBIFOLDS Y GRUPOS: IMPORTANCIA EN LA FÍSICA

Los orbifolds y grupos son relevantes en el contexto de la teoría de cuerdas y su compactificación en orbifolds para obtener modelos prometedores en la física de partículas. En la Figura 4 se muestra un



esquema que ilustra estas conexiones, las cuales comentamos enseguida.

Los orbifolds son usados en la compactificación de la cuerda heterótica. Esta teoría está definida en un espacio-tiempo de diez dimensiones y tiene un grupo G_1 que la caracteriza y un contenido de partículas C_1 . Para hacer contacto con nuestro mundo ordinario de cuatro dimensiones (tres dimensiones espaciales y una temporal), es necesario compactificar (enrollar u ocultar) las seis dimensiones espaciales adicionales de la teoría de cuerdas en un espacio compacto, donde un ejemplo de tal espacio es un orbifold en seis dimensiones. Al realizar el proceso de compactificación en orbifolds se obtienen modelos en cuatro dimensiones que pueden ser usados para estudiar diversos aspectos en la física de partículas.

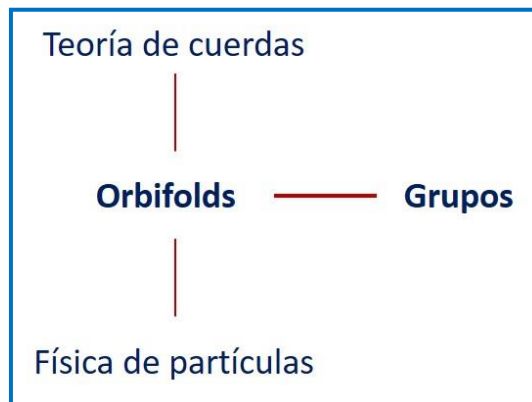


Figura 4. Esquema que muestra una relación entre orbifolds y grupos en el contexto de las compactificaciones de cuerdas en orbifolds con aplicaciones en la física de partículas.

Tales modelos están caracterizados, entre otros detalles, por un grupo G_2 que es subgrupo de G_1 , y un contenido C_2 de partículas que contiene las partículas de C_1 que sobreviven la compactificación y otras nuevas partículas. Las características de G_2 y C_2 dependen, por ejemplo, de la geometría de los orbifolds y de los parámetros usados en las compactificaciones, tales como los llamados vectores de desplazamiento y líneas de Wilson (Ramos-Sánchez, 2009).



En el estudio de la física de partículas se tiene al ME, el cual es una teoría en cuatro dimensiones caracterizada por un grupo H y un contenido de partículas M , clasificadas en bolsones y fermiones. El grupo H es un subgrupo del grupo G_2 , y el conjunto de partícula M es un subconjunto del conjunto de partículas C_2 . Uno de los intentos en las compactificaciones de cuerdas en orbifolds es obtener modelos en cuatro dimensiones que sean cercanos al ME de la física de partículas en el sentido de que estos modelos contengan el grupo y partículas del ME, además de un menor número y tipo de partículas adicionales a las ME. Tales modelos son llamados modelos tipo ME y han sido identificados en distintos orbifolds (Pérez Martínez y col., 2021).

Un problema en la física de partículas es el problema del sabor, el cual se presenta en el sector de Yukawa del ME, donde los fermiones adquieren masa mediante el mecanismo de Higgs o rompimiento espontáneo de la simetría. Los experimentos indican que las masas de los fermiones muestran un patrón de jerarquía, por ejemplo, los cuarks de la tercera generación son más pesados que los de la primera. Las masas de los fermiones en el ME dependen del valor esperado en el vacío del Higgs y de parámetros libres como los acoplamientos de Yukawa, los cuales son ajustados para reproducir los valores de masa medidos (Langacker, 2017). El problema del sabor busca explicar por qué los parámetros libres del ME tienen tales valores, y en consecuencia explicar la jerarquía observada en los valores de masa para los fermiones (quarks y leptones) del ME. El problema del sabor también busca dar respuesta a otras cuestiones, por ejemplo, por qué solo existen tres generaciones de fermiones, y por qué las matrices de mezcla para leptones y cuarks son diferentes. Una matriz de mezcla está parametrizada, por ejemplo, por ángulos de rotación llamados ángulos de mezcla, y relacionan los estados cuánticos de los fermiones en dos bases diferentes. Los ángulos de mezcla son otro conjunto de parámetros libres en el ME (Ishimori y col., 2010; Zupan, 2019; Nilles y Ramos-Sánchez, 2024). Una manera de tratar este problema es considerar grupos discretos no Abelianos como el grupo diedral D_4 , el grupo de permutaciones S_3 , el grupo alternante A_4 , el grupo $\Delta(54)$,



entre otros (Hernández y col., 2022; Félix y col., 2006; Ishimori y col., 2010, Bora y col., 2024). Los grupos usados en este contexto se les suele llamar grupos de sabor, donde la palabra sabor hace referencia a los distintos tipos o sabores de fermiones (por ejemplo, para los leptones se tiene el electrón, el muón y el tau, además del neutrino del electrón, del muón y del tau). Es remarcable conocer que varios grupos de sabor pueden ser obtenidos de los orbifolds usados en las compactificaciones de cuerdas (Kobayashi y col., 2007; Nilles y col., 2012; Ramos-Sánchez y Vaudrevange, 2019). Por ejemplo, el grupo diedral D_4 surge de la geometría del orbifold unidimensional con grupo de punto Z_2 , mientras que el grupo $\Delta(54)$ puede originarse del orbifold en dos dimensiones con grupo de punto Z_3 (Kobayashi y col., 2007). Una lista más completa de grupos de sabor que se han encontrado en distintas geometrías de orbifolds en seis dimensiones es reportada en la referencia (Olguín-Trejo y col., 2018).

Mediante el uso de las propiedades matemáticas de los grupos, se busca restringir o dar una forma a las estructuras que determinan las masas de los fermiones en el ME y realizar predicciones para sus valores de masa al ajustar un cierto número de parámetros con la finalidad de comparar los resultados con las observaciones experimentales. El grupo D_4 ha sido considerado en estas exploraciones (Miskaoui, 2024; Srivastava y col., 2022; Hernández y col., 2022). Modelos con diferentes grupos de sabor, como D_4 y $\Delta(54)$, conllevan a distintas predicciones ya que, por ejemplo, la manera de asignar a las partículas de un cierto modelo a las representaciones del grupo de sabor determina los acoplamientos de Yukawa permitidos entre los fermiones y campos escalares del modelo, y en consecuencia, las estructuras que dan lugar a las masas y ángulos de mezcla después del rompimiento espontáneo de la simetría. Los acoplamientos de Yukawa entre los fermiones y campos escalares como el Higgs deben ser invariantes no solo bajo el grupo del ME, sino también ante el grupo de sabor considerado (Ishimori y col., 2010; Hernández y col., 2022; Bora y col., 2024). El hecho de que grupos de sabor como D_4 o $\Delta(54)$, puedan originarse de una teoría mayor como la teoría de cuerdas y sus compactificaciones en orbifolds, brinda una motivación adicional para



construir modelos de sabor basados en estos grupos (Ishimori y col., 2008; Carballo-Pérez y col., 2016).

Se aprecia entonces que los grupos aparecen en los tres elementos conectados verticalmente en el esquema de la Figura 4, es decir, están presentes en la teoría de cuerdas, en los orbifolds y en la física de partículas. En la teoría de la cuerda heterótica se tiene que un grupo caracteriza al tipo de teoría, por ejemplo, puede ser $G_1 = E_8 \times E_8$ o $G_1 = SO(16) \times SO(16)$ (Gross y col., 1985; Dixon y Harvey, 1986). En los orbifolds hemos visto que su propia definición involucra grupos tipo Z_N , además de que dan lugar a grupos de sabor, como el caso del grupo D_4 a partir del orbifold Z_2 unidimensional. Por otra parte, el ME de la física de partículas está caracterizado por el grupo $H = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, y para tratar el problema del sabor se han considerado grupos discretos no Abelianos como D_4, S_3, A_4 , entre otros, (Ishimori y col., 2010). Es importante mencionar que los grupos del ME y de la teoría de cuerda heterótica son ejemplos de grupos continuos o grupos de Lie, los cuales tienen un lugar especial en la descripción de las interacciones fundamentales y la construcción de modelos más allá del ME (Slansky, 1981; Babu y col., 2023; Rivero, 2024; Chiang y col., 2024).

Otros grupos que también están siendo usados para tratar el problema del sabor son los grupos modulares (Feruglio, 2018; Kikuchi y col., 2022; Kobayashi y Tanimoto, 2024; Ding y King, 2024; Arriaga-Osante y col., 2024). Una de sus ventajas es que permiten reducir el número de parámetros necesarios para predecir los valores de masa y mezcla para los fermiones, comparado al caso de los grupos discretos no Abelianos que no son modulares. En el contexto de grupos modulares de sabor se tiene que los acoplamientos de Yukawa son formas modulares. Resulta interesante que, mediante otros procedimientos, algunos grupos modulares, junto con los llamados grupos eclécticos, pueden ser obtenidos de la geometría de los orbifolds usados en las compactificaciones de la cuerda heterótica (Baur y col., 2019; Nilles y col., 2020; Baur y col., 2024).



6. CONCLUSIONES

En este artículo mostramos cómo las propiedades geométricas y algebraicas del orbifold Z_2 unidimensional dan lugar al grupo diedral D_4 . En particular vimos que los puntos fijos y la regla de selección del grupo de espacio son las propiedades que determinan al grupo que surge del orbifold. Esto representa un origen diferente y atractivo para el grupo diedral D_4 , comparado al caso usual donde el grupo D_4 es obtenido por las simetrías del cuadrado.

Apreciamos que los orbifolds son interesantes ya que además de dar origen a distintos grupos, son empleados en la compactificación de la cuerda heterótica para obtener modelos en la física de partículas y estudiar problemas como el problema del sabor, el cual trata de explicar, por ejemplo, el origen de la jerarquía de masas observada en los fermiones del ME. Remarcamos que una propuesta para tratar el problema del sabor es considerar grupos discretos no Abelianos como el grupo diedral D_4 , aunque hay muchos otros grupos también. A los grupos empleados en este contexto se les llama grupos de sabor.

Notamos que los grupos aparecen en distintos niveles de las teorías físicas. Por ejemplo, en en la compactificación de la cuerda heterótica en orbifolds y en la física de partículas. Por lo tanto, los grupos y orbifolds son estructuras que vale la pena seguir explorando para vislumbrar, junto con otros elementos de las teorías modernas de la física, las razones del por qué observamos la jerarquía de masas para los fermiones, además de proveernos de herramientas matemáticas de simetría que nos ayudan a entender una parte de la naturaleza de nuestro Universo.

REFERENCIAS

Arriaga-Osante, C., Liu, X., and Ramos-Sánchez, S. (2024). Quark and lepton modular models from the binary dihedral flavor symmetry. *Journal of High Energy Physics*, 2024(5):119. [https://doi.org/10.1007/jhep05\(2024\)119](https://doi.org/10.1007/jhep05(2024)119)



CienciAcierta

- Babu, K. S., Bajc, B., and Susič, V. (2023). Trinification from E6 symmetry breaking. *Journal of High Energy Physics*, 2023(7): 11. [https://doi.org/10.1007/jhep07\(2023\)011](https://doi.org/10.1007/jhep07(2023)011)
- Baur, A., Nilles, H. P., Ramos-Sánchez, S., Trautner, A., and Vaudrevange, P. K. S. (2024). The eclectic flavor symmetries of T2/ZK orbifolds. *Journal of High Energy Physics*, 2024(9):159. [https://doi.org/10.1007/jhep09\(2024\)159](https://doi.org/10.1007/jhep09(2024)159)
- Baur, A., Nilles, H. P., Trautner, A., and Vaudrevange, P. K. (2019). Unification of flavor, CP, and modular symmetries. *Physics Letters B*, 795: 7-14. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.066>
- Bora, H., Ng, K. F., Barman, A., and Thapa, B. (2024). Majorana neutrinos in Double Inverse Seesaw and $\Delta(54)$ Flavor Models. *International Journal of Modern Physics A*, 39(15n16): 2450066. <https://doi.org/10.1142/s0217751x24500660>
- Carballo-Pérez, B., Peinado, E., and Ramos-Sánchez, S. (2016). $\Delta(54)$ flavor phenomenology and strings. *Journal of High Energy Physics*, 2016(12): 131. [https://doi.org/10.1007/jhep12\(2016\)131](https://doi.org/10.1007/jhep12(2016)131)
- Chiang, C., Tsumura, K., Uchida, Y., and Yamatsu, N. (2024). Pseudo-Nambu-Goldstone dark matter in SU(7) grand unification. *Physical Review D*, 109(5): 055040. <https://doi.org/10.1103/physrevd.109.055040>
- Ding, G., and King, S. F. (2024). Neutrino mass and mixing with modular symmetry. *Reports on Progress in Physics*, 87(8): 084201. <https://doi.org/10.1088/1361-6633/ad52a3>
- Dixon, L., and Harvey, J. (1986). String theories in ten dimensions without spacetime supersymmetry. *Nuclear Physics B*, 274(1): 93-105. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(86\)90619-x](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90619-x)
- Dixon, L., Harvey, J., Vafa, C., and Witten, E. (1985). Strings on orbifolds. *Nuclear Physics B*, 261: 678-686. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(85\)90593-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90593-0)
- Félix, O., Mondragón, A., Mondragón, M., and Peinado, E. (2007). Neutrino masses and mixings in a minimal S3-invariant extension of the standard model. *AIP Conference Proceedings*. <https://doi.org/10.1063/1.2751980>
- Feruglio, F. (2018). Are neutrino masses modular forms? *WORLD SCIENTIFIC EBooks*, 227–266. https://doi.org/10.1142/9789813238053_0012
- Gross, D. J., Harvey, J. A., Martinec, E., and Rohm, R. (1985). Heterotic string. *Physical Review Letters*, 54(6): 502-505. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.54.502>



- Hernández, A. E. C., Long, H. N., Mora-Urrutia, M. L., Thao, N. H., and Vien, V. V. (2022). Fermion masses and mixings and $g-2$ muon anomaly in a 3-3-1 model with D_4 family symmetry. *The European Physical Journal C*, 82(8):769. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10639-9>
- Ishimori, H., Kobayashi, T., Ohki, H., Omura, Y., Takahashi, R., and Tanimoto, M. (2008). D_4 flavor symmetry for neutrino masses and mixing. *Physics Letters B*, 662(2): 178-184. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.03.007>
- Ishimori, H., Kobayashi, T., Ohki, H., Shimizu, Y., Okada, H., and Tanimoto, M. (2010). Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 183: 1-163. <https://doi.org/10.1143/ptps.183.1>
- Kikuchi, S., Kobayashi, T., Tanimoto, M., and Uchida, H. (2022). Mass matrices with CP phase in modular flavor symmetry. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2022(11): 113B07. <https://doi.org/10.1093/ptep/ptac141>
- Kobayashi, T., Nilles, H. P., Plöger, F., Raby, S., and Ratz, M. (2007). Stringy origin of non-Abelian discrete flavor symmetries. *Nuclear Physics B*, 768(1-2): 135-156. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2007.01.018>
- Kobayashi, T., and Tanimoto, M. (2024). Modular flavor symmetric models. *International Journal of Modern Physics A*, 39(09n10): 2450066. <https://doi.org/10.1142/s0217751x24410124>
- Langacker, P. (2020). *The standard model and beyond* (2nd ed.). CRC Press.
- Miskaoui, M. (2024). Neutrino model with broken μ - τ symmetry and unflavored leptogenesis with dihedral flavor symmetry. *Physics of The Dark Universe*, 45: 101507. <https://doi.org/10.1016/j.dark.2024.101507>
- Nilles, H. P., and Ramos-Sánchez, S. (2024). The flavor puzzle: Textures and symmetries. *International Journal of Modern Physics A*, 39(09n10): 2441003. <https://doi.org/10.1142/s0217751x24410033>
- Nilles, H. P., Ramos-Sánchez, S., and Vaudrevange, P. K. S. (2020). Eclectic flavor groups. *Journal Of High Energy Physics*, 2020(2): 45. [https://doi.org/10.1007/jhep02\(2020\)045](https://doi.org/10.1007/jhep02(2020)045)
- Olguín-Trejo, Y., Pérez-Martínez, R., and Ramos-Sánchez, S. (2018). Charting the flavor landscape of MSSM-like Abelian heterotic orbifolds. *Physical Review D*, 98(10): 106020. <https://doi.org/10.1103/physrevd.98.106020>



- Pérez-Martínez, R., Ramos-Sánchez, S., and Vaudrevange, P. K. S. (2021). Landscape of promising nonsupersymmetric string models. *Physical Review. D.*, 104(4). <https://doi.org/10.1103/physrevd.104.046026>
- Ramond, P. (2010). *Group theory: A Physicist's Survey*. Cambridge University Press.
- Ramos-Sánchez, S. (2009). Towards low energy physics from the heterotic string. *Fortschritte Der Physik*, 57(10), 907-1036. <https://doi.org/10.1002/prop.200900073>
- Ramos-Sánchez, S., and Vaudrevange, P. K. S. (2019). Note on the space group selection rule for closed strings on orbifolds. *Journal Of High Energy Physics*, 2019(1). [https://doi.org/10.1007/jhep01\(2019\)055](https://doi.org/10.1007/jhep01(2019)055)
- Rivero, A. (2024). An interpretation of scalars in $SO(32)$. *The European Physical Journal C*, 84(10). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13368-3>
- Slansky, R. (1981). Group theory for unified model building. *Physics Reports*, 79(1), 1-128. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(81\)90092-2](https://doi.org/10.1016/0370-1573(81)90092-2)
- Srivastava, A., Levy, M., and Das, D. (2022). Diluting quark flavor hierarchies using dihedral symmetry. *The European Physical Journal C*, 82(3):205. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10125-2>
- Zupan, J. (2019). Introduction to flavour physics. *CERN Yellow Reports: School Proceedings*, 6, 181. <https://doi.org/10.23730/cyrsp-2019-006.181>