

UNA APLICACIÓN DE S_3 EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE MASA PARA LEPTONES CARGADOS

AN APPLICATION OF S_3 IN THE CONSTRUCTION OF THE MASS MATRIX FOR CHARGED LEPTONS

RESUMEN

PÉREZ MARTÍNEZ, Ricardo

El uso de los grupos en la física de partículas es relevante en el problema del sabor, el cual trata de explicar la jerarquía de masas para los fermiones en el sector de Yukawa del Modelo Estándar. En este trabajo mostramos una aplicación del grupo no Abelian S_3 en la construcción del lagrangiano de Yukawa y la matriz de masa. En particular exploramos la influencia de una representación de dimensión dos de S_3 y los coeficientes de Clebsch-Gordan en la estructura de la matriz de masa para leptones cargados. Consideramos un modelo reportado en la literatura donde otra representación de S_3 es usada. Encontramos que nuestra matriz de masa presenta una estructura diferente y un menor número de parámetros que la correspondiente matriz del modelo original. Enfatizamos que el origen de la estructura de nuestra matriz de masa es debido a los coeficientes de Clebsch-Gordan ya que estos dependen de la base para la representación de S_3 .

Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas, Universidad Autónoma
de Coahuila, Saltillo, Coahuila,
México.

Palabras clave: grupos; representaciones; coeficientes de Clebsch-Gordan; matriz de masa; física de partículas.

ABSTRACT

The use of groups in particle physics is relevant to the flavor problem, which seeks to explain the mass hierarchy for fermions in the Yukawa sector of the Standard Model. In this work, we show an application of the non-Abelian group S_3 in the construction of the Yukawa lagrangian and the mass matrix. In particular, we explore the influence of a two-dimensional representation of S_3 and the Clebsch-Gordan coefficients in the structure of the mass matrix for charged leptons. We consider a model reported in the literature where a different representation of S_3 is used. We find that our mass matrix has a different structure and fewer parameters than the corresponding matrix of the

Correspondencia
ricardo.perezmartinez@uadec.edu.mx
<https://orcid.org/0000-0003-2923-4970>
Fecha de recepción
5 de febrero de 2026.
Fecha de aceptación
12 de agosto de 2026.

original model. We emphasize that the origin of the structure of our mass matrix is due to the Clebsch-Gordan coefficients since these depend on the basis for the representation of S_3 .

Keywords: groups; representations; Clebsch-Gordan coefficients; mass matrix; particle physics.

1. INTRODUCCIÓN

La descripción de las partículas elementales y sus interacciones está dada por el Modelo Estándar (ME) de la física de partículas (Langacker, 2020; Peskin & Schroeder, 1995). Este modelo es exitoso porque ha sido probado experimentalmente con gran precisión. Sin embargo, existen algunos aspectos en el ME que hacen pensar que este modelo no sea considerado como la teoría final (Langacker, 2020). Un ejemplo de esto se presenta en el sector de Yukawa, el cual está descrito por un lagrangiano que describe las interacciones entre los fermiones con el campo de Higgs. Este sector tiene muchos parámetros libres que deben ser ajustados para que sus predicciones estén de acuerdo con las observaciones experimentales (Langacker, 2020; Zupan, 2019). La intensidad de estas interacciones está dada por los acoplamientos de Yukawa. Al aplicar el mecanismo de Higgs se obtiene una matriz de masa para los fermiones, la cual depende, por ejemplo, de los acoplamientos de Yukawa como parámetros libres en el ME.

Las observaciones indican que las masas de los fermiones presentan una jerarquía en sus valores. Por ejemplo, la masa del tau es mucho mayor que la masa del electrón, aproximadamente por un orden de 3.5×10^3 (Navas et al., 2024). En el ME es necesario ajustar los valores de los acoplamientos de Yukawa para reproducir los valores de las masas de los fermiones. Sin embargo, uno se pregunta el porqué los acoplamientos de Yukawa deben tener tales valores, o en forma equivalente, el porque los fermiones tienen los valores de masa reportados por los experimentos. Estas cuestiones forman parte del problema del sabor de la física de partículas, donde la palabra sabor se refiere a los distintos tipos o sabores de fermiones en el ME (Grossman, 2010; Zupan, 2019). Una propuesta para tratar de entender y explicar este problema es considerar grupos discretos no Abelianos referidos como grupos de sabor. Estos grupos pueden provenir de la geometría de los orbifolds usados en la compactificación de la cuerda heterótica (Baur et al., 2019;



Nilles et al., 2020; Nilles & Ramos-Sánchez, 2024) y también pueden ser propuestos directamente en modelos más allá del ME (Ding & King, 2024; Ding & Valle, 2025; Feruglio, 2018; Ishimori et al., 2010). En particular, el grupo de permutaciones S_3 y el grupo cíclico Z_2 han sido considerados en diversos estudios del problema del sabor (Canales et al., 2012; Meloni, 2012; Mondragón et al., 2007). En estos modelos las propiedades matemáticas del grupo restringen la estructura del lagrangiano de Yukawa y la matriz de masa. Un posible efecto de los grupos de sabor en estas construcciones es que la matriz de masa podría depender de un número menor de parámetros comparado al caso del ME y que sus predicciones, a través de un estudio fenomenológico, estuvieran de acuerdo con las observaciones experimentales. De esta forma, la estructura de la matriz de masa y los valores de las masas de los fermiones podrían tener una explicación basada en las simetrías del grupo de sabor (Ishimori et al., 2010; Nilles & Ramos-Sánchez, 2024).

En estas construcciones los coeficientes de Clebsch-Gordan (CCG) del producto directo de representaciones del grupo no Abelian de sabor son indispensables para construir el lagrangiano de Yukawa que es invariante ante la simetría de tal grupo. Una propiedad de los CCG es que dependen de la base, y en consecuencia, de la representación del grupo. Imaginemos un modelo donde una representación del grupo de sabor es usada para construir el lagrangiano de Yukawa y la matriz de masa de un tipo de fermiones. Entonces, una pregunta interesante sería: ¿qué cambios en la estructura y el número de parámetros de la matriz de masa se obtendrían si otra representación del grupo S_3 fuera usada?

El objetivo de este trabajo es explorar el efecto del cambio de base o de representación del grupo no Abelian S_3 en la estructura de la matriz de masa para leptones cargados como una aplicación del grupo de permutaciones S_3 en la física de partículas. En particular elegimos una representación de dimensión dos para el grupo S_3 y usamos los CCG del producto de dos y tres dobletes de S_3 para construir el lagrangiano de Yukawa invariante y la matriz de masa para leptones cargados. Tomamos como base el modelo reportado en Kubo et al. (2003) donde otra representación de S_3 es usada. Comparamos nuestra matriz de masa con la correspondiente matriz del modelo original y notamos que nuestra matriz de masa presenta una estructura diferente y un menor número de parámetros. Discutimos las razones de tales modificaciones enfatizando que su origen es debido a los



CCG, pues estos dependen de la base elegida para la representación del grupo S_3 . Mostramos también la matriz de cambio de base entre estas dos representaciones de S_3 . En este trabajo no exploramos las implicaciones fenomenológicas de nuestra matriz de masa para leptones cargados ya que está más allá del objetivo del presente trabajo.

El contenido de este artículo es el siguiente. En la sección 2 mostramos algunas propiedades de S_3 como las representaciones y los CCG que son necesarios para la construcción de la matriz de masa. En la sección 3 hablamos sobre el problema del sabor en el ME y el uso de los grupos en este contexto. En la sección 4 presentamos la aplicación del grupo S_3 en la construcción de la matriz de masa para leptones cargados tomando como base el modelo reportado en (Kubo et al., 2003). En la sección 5 presentamos una discusión de resultados basada en las razones que dan lugar a la estructura de nuestra matriz de masa cuando se compara con la matriz reportada en el modelo original. Finalmente, en la sección 6 las conclusiones son presentadas.

2. S_3 , REPRESENTACIONES Y COEFICIENTES DE CLEBSCH-GORDAN

El grupo S_3 es el grupo de permutaciones de tres objetos. Es un grupo discreto no Abelian con seis elementos. La presentación de S_3 según Ramond (2010)

$$S_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle, \quad (1)$$

donde a y b son los generadores del grupo y e es el elemento identidad. Los elementos de S_3 son $\{e, a, a^2, b, ab, ba\}$ y sus tres clases de conjugación son

$$C_1 = \{e\}, \quad C_2 = \{a, a^2\}, \quad C_3 = \{b, ab, ba\}. \quad (2)$$

La tabla de carácter para S_3 se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Tabla de carácter de S_3 . El primer renglón y la primera columna enumeran las clases y representaciones irreducibles de S_3 , respectivamente.

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	-1	1
3	2	0	-1

La segunda columna en la tabla 1 corresponde a la clase $C_1 = \{e\}$ por lo que la traza de la representación $R(e)$ es la dimensión de la representación. De esta forma, en S_3 se tienen dos representaciones de dimensión uno, y una de dimensión dos. En términos de las representaciones $R(g)$ las clases de conjugación son

$$C_1 = \{R(e)\}, C_2 = \{R(a), R(a^2)\}, C_3 = \{R(b), R(ab), R(ba)\}. \quad (3)$$

Una representación matricial de dimensión dos para los generadores a y b de S_3 está dada por Ishimori et al. (2010)

$$R(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad R(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Las representaciones para los demás elementos del grupo se pueden obtener mediante $R(a^2) = R(a) * R(a)$, $R(ab) = R(a) * R(b)$, $R(ba) = R(b) * R(a)$, y para el elemento identidad se tiene que $R(e) = \mathbb{1}$, la matriz identidad de dimensión dos.

De la tabla de caracter se puede conocer cómo el producto directo de dos representaciones irreducibles se escribe como sumas directas de representaciones irreducibles (Tung, 1985). Por ejemplo, en S_3 se tiene que $2 \otimes 2 = 1 \oplus 1 \oplus 2$. En este contexto, si $R(g)$ es una representación matricial de dimensión dos, entonces $R(g) \otimes R(g) = U(g)$ denota una representación reducible de dimensión cuatro. La matriz $U(g)$ se puede llevar a una base donde se representa como una matriz diagonal por bloques $U_d(g) = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$, tal que la suma de las dimensiones de $D_{1,2,3}$ es cuatro. Lo anterior establece que existe una matriz de transformación (de cambio de base) T tal que $TUT^{-1} = U_d$. Los coeficientes de Clebsch-Gordan (CCG) son los elementos de T . Para la representación (4) de S_3 se tiene que la matriz T está dada por



$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Los CCG en (5) establecen cómo se transforman las componentes de dos dobletes de S_3 en el producto $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$. En este caso, la regla de multiplicación está dada por Ishimori et al. (2010):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2) \oplus (x_1 y_2 - x_2 y_1) \oplus \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Para las aplicaciones que nos interesan en la física de partículas basta enfocarnos a la combinación lineal que se transforma de manera invariante. En este caso, esta combinación es $(x_1 y_1 + x_2 y_2)$, y corresponde a la primera representación de dimensión uno que aparece en la suma directa. La segunda combinación lineal, $(x_1 y_2 - x_2 y_1)$, asociada a la segunda representación de dimensión uno, no es invariante porque adquiere un signo menos bajo la transformación $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ en S_3 . Para tomar en cuenta esta distinción se suele escribir $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}' \oplus \mathbf{2}$.

Utilizaremos la notación

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow (x_1 y_1 + x_2 y_2) \quad (7)$$

para indicar solamente la combinación lineal invariante que surge del producto $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ en S_3 . Del producto $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ se obtiene otra combinación lineal invariante, la cual está dada por



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow (x_1 y_2 z_1 + x_2 y_2 z_1 + x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_2). \quad (8)$$

Es conocido que los CCG dependen de la base elegida para la representación del grupo S_3 , mientras que la relación $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$ es independiente de la base (Tung, 1985). Consideremos ahora la siguiente representación, dada por Ishimori et al. (2010) de dimensión dos para S_3

$$R(a) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad R(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

donde $\omega = e^{2\pi i/3}$. En este caso el producto tensorial de dos dobletes de S_3 está dado por Ishimori et al. (2010)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_2 + x_2 y_1) \oplus (x_1 y_2 - x_2 y_1) \oplus \begin{pmatrix} x_2 y_2 \\ x_1 y_1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

La matriz de transformación T está dada por

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

La primera combinación lineal en (10) corresponde a la combinación lineal invariante, lo cual indicamos mediante

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow (x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (12)$$

Del producto $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ se obtiene otro invariante dado por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow (x_2 y_2 z_2 + x_1 y_1 z_1). \quad (13)$$

Notamos que los CCG para el producto $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$ mostrados en (6), son distintos a los mostrados en (10). Esto es porque en (6) usamos la representación (4) de S_3 , mientras que en (10) usamos la representación (9).



Estas dos representaciones matriciales de dimensión dos se ven distintas, pero son equivalentes ya que están relacionadas por un cambio de base mediante la transformación de similitud $P^{-1}RP = R'$, donde

$$P = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad (14)$$

es la matriz de transformación o de cambio de base, con $\alpha = 1/\sqrt{2}$, y donde R y R' denotan las representaciones (4) y (9) de S_3 , respectivamente. De esta forma, apreciamos que los CCG son dependientes de la base o de la representación, mientras que la regla $2 \otimes 2 = 1 \oplus 1 \oplus 2$ es independiente de ella. Otras estructuras de los grupos que no dependen de la representación del grupo son las clases de conjugación y la tabla de caracter, es decir, de la traza de la representación (Tung, 1985).

3. PROBLEMA DEL SABOR EN EL MODELO ESTÁNDAR

El lagrangiano que describe las interacciones entre los fermiones y el campo de Higgs en el ME es el lagrangiano de Yukawa, el cual es invariante bajo el grupo de norma $G_{ME} = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (Peskin & Schroeder, 1995). Para el sector de leptones este lagrangiano está dado por Langacker (2020)

$$L_Y = -Y_{mn} \bar{l}_{mL} \phi e_{nR} + h.c., \quad (15)$$

donde los subíndices repetidos m y n indican sumatoria con valores $m, n = 1, 2, 3$ para las tres familias de leptones del ME. Los acoplamientos de Yukawa son denotados por Y_{mn} e indican la intensidad de la interacción. La abreviación $h.c.$ se refiere al hermitiano conjugado del primer término. Las representaciones de los campos en (15) bajo el grupo del ME se presentan en la tabla 2.



Tabla 2. Representaciones para los leptones y el Higgs bajo el grupo $G_{ME} = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Leptones	Representaciones	Higgs	Representación
$l_{mL} = \begin{pmatrix} \nu_{mL} \\ e_{mL} \end{pmatrix}$	$3(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}$	$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	$1(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{1/2}$
ν_{mR}	$3(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$		
e_{mR}	$3(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}$		

La notación usada es $\mathbf{m}(\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_2)_Y$, donde $\mathbf{m} = 1, 2, 3$ denota la familia de fermiones. $\mathbf{R}_3$ es la representación bajo $SU(3)_c$, $\mathbf{R}_2$ es la representación bajo $SU(2)_L$, y Y es el valor de hipercarga Y , la cual está relacionada con la carga eléctrica de estas partículas.

Los campos l_{mL} son dobletes de $SU(2)_L$, y contienen a los neutrinos y leptones cargados izquierdos. Los campos ν_{mR} y e_{mR} denotan a los neutrinos y leptones cargados derechos, los cuales son singuletes de $SU(2)_L$. El subíndice L y R indica la quiralidad izquierda y derecha, respectivamente (Peskin & Schroeder, 1995). El campo de Higgs es denotado por ϕ , y es un doblete de $SU(2)_L$.

Al aplicar el mecanismo de Higgs (o rompimiento espontáneo de la simetría) se obtiene la matriz de masa para leptones cargados (Langacker, 2020; Peskin & Schroeder, 1995),

$$M_{ME} = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

donde $v = 246$ GeV es la escala electrodébil. La matriz en (16) es no hermitiana en general, y su diagonalización es efectuada por la transformación

$$A_L^\dagger M_{ME} A_R = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau), \quad (17)$$

donde A_L y A_R son matrices unitarias, y m_f , para $f = e, \mu, \tau$, denota las masas de los leptones cargados: electrón (e), muón (μ) y tau (τ). Al reescribir el lagrangiano de Yukawa en términos de los campos físicos se obtienen las expresiones para las masas de los leptones cargados (Langacker, 2020; Tong, s. f.),

$$m_e = y_e \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_\mu = y_\mu \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_\tau = y_\tau \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (18)$$

donde y_f son los acoplamientos Yukawa. De acuerdo a las mediciones experimentales los valores aproximados para estas masas y acoplamientos se muestran en la tabla 3.



Tabla 3. Valores aproximados para las masas y acoplamientos de Yukawa de los leptones cargados del ME (Navas et al., 2024).

Leptón cargado	Generación	Masa	Acoplamiento de Yukawa
electrón	primera	$m_e \approx 0.5 \text{ MeV}$	$y_e \approx 2.9 \times 10^{-6}$
muón	segunda	$m_\mu \approx 105.6 \text{ MeV}$	$y_\mu \approx 6.1 \times 10^{-4}$
tau	tercera	$m_\tau \approx 1776.9 \text{ MeV}$	$y_\tau \approx 1 \times 10^{-2}$

De la tabla 3 notamos que existe una jerarquía entre las masas de estas partículas, por ejemplo, la masa del electrón es mucho menor que la masa del tau, y análogamente para los acoplamientos de Yukawa. Una de las preguntas que el problema del sabor trata de responder es: ¿cuál es el origen del patrón observado para las masas de los leptones cargados?

En las expresiones para las masas de los leptones cargados, presentadas en (18), se tiene que los acoplamientos de Yukawa son parámetros libres, por lo que tienen que ser ajustados a mano para reproducir los valores de masa observados. Sería deseable contar con una teoría que tuviera un mecanismo que diera directamente los valores correctos a tales parámetros, proporcionando así un origen al patrón de masas observado en la naturaleza.

El problema del sabor en la física de partículas no solo trata de explicar el patrón de jerarquía en las masas de los leptones cargados, sino también el patrón de masas presentado en los neutrinos y en los quarks. Otras cuestiones que trata el problema del sabor son, por ejemplo: ¿Por qué se tienen tres generaciones de fermiones? ¿Por qué las matrices de mezcla para los leptones y los quarks son distintas? (Grossman, 2010; Nilles y Ramos-Sánchez, 2024; Zupan, 2019). La búsqueda de las respuestas a estas preguntas fundamentales en la física de partículas ha llevado a considerar propuestas interesantes como el uso de grupos matemáticos que a continuación tratamos.

3.1 GRUPOS DE SABOR

Una propuesta para tratar de resolver el problema del sabor es usar grupos discretos no Abelianos como $S_3, S_4, A_4, D_4, \Delta(54)$, entre otros (Barman et al., 2024; Chamoun & Lashin, 2025; Das y Pal, 2018; Ding & Valle, 2025; Escobar & Luhn, 2009; Hernández et al., 2022; Ishimori et al., 2008, 2010; Meloni, 2012; Mondragón et al., 2007). A los grupos aplicados en este contexto se les suele llamar grupos de sabor. Los modelos construidos con este tipo de grupos son ejemplos de modelos más allá del ME, donde no solo



se considera una extensión al grupo del ME por el grupo de sabor G , sino también campos adicionales a los del ME. En estos modelos extendidos los campos son asignados a representaciones del grupo de sabor tal que mediante el uso de sus propiedades algebraicas se tenga un control sobre los acoplamientos en el lagrangiano de Yukawa, el cual debe ser invariante bajo el grupo de sabor G . De esta manera, las simetrías del grupo restringen la forma del lagrangiano de Yukawa del modelo. Después del rompimiento espontáneo de simetría, el grupo de sabor también influye en la estructura de la matriz de masa donde se busca, en parte, que esta tenga un número menor de parámetros y que su estructura sea algo más simple, como contar con la presencia de algunos elementos nulos, comparada con la matriz de masa en el ME (Félix et al., 2007; Ishimori et al., 2010; Nilles & Ramos-Sánchez, 2024). De esta manera, después del proceso de diagonalización y construcción de la matriz de mezcla, se espera que las masas de los fermiones dependan de un número menor de parámetros.

Otro tipo de grupos de sabor son los grupos modulares (Arriaga-Osante et al., 2025; Ding & King, 2024; Ding & Valle, 2025). Las propiedades matemáticas de estos grupos implican que los acoplamientos de Yukawa son formas modulares, las cuales son funciones matemáticas que dependen de un parámetro complejo y que se transforman de una manera específica bajo el grupo modular. En estos modelos el número de parámetros en el sector de Yukawa es menor al caso de modelos con grupos que no son modulares (Feruglio, 2018). A los grupos no modulares se les suele llamar grupos tradicionales (Nilles & Ramos-Sánchez, 2024). Tanto los grupos tradicionales como modulares y su unión no trivial (grupos eclécticos) pueden originarse en la geometría de los orbifolds usados en la compactificación de la cuerda heterótica (Baur et al., 2019; Carballo-Pérez et al., 2016; Nilles et al., 2020).

Para los propósitos de este trabajo nos enfocamos al grupo S_3 como grupo tradicional de sabor, y cuyo origen es debido a las permutaciones de tres objetos. No consideramos su origen por la geometría de los orbifolds, ni tampoco un tratamiento como grupo modular. Estos aspectos podrían ser tratados en un trabajo futuro. En la siguiente sección mostramos cómo las propiedades matemáticas del grupo S_3 restringen la forma del lagrangiano de Yukawa y la matriz de masa en un modelo particular donde nos enfocamos a un tipo específico de fermiones.



4. S_3 EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE MASA

En esta sección consideramos el grupo de sabor S_3 con la representación de dimensión dos presentada en (9), y con los coeficientes de Clebsch-Gordan en (12) y (13) asociados a los invariantes que resultan del producto de dos y tres dobletes de S_3 , respectivamente. El objetivo es construir la matriz de masa para leptones cargados tomando como base el modelo original presentado por Kubo et al. (2003), donde se usó la representación (4) de S_3 y una simetría Z_2 . Nos interesa conocer si la matriz de masa para leptones cargados que calculamos con la representación (9) de S_3 presenta un número menor de parámetros que la correspondiente matriz del modelo original.

En la tabla 4 presentamos el contenido de partículas de nuestro interés en el modelo de Kubo et al. (2003), además de sus asignaciones a las representaciones 1 y 2 del grupo S_3 . En este modelo se consideran dos dobletes de Higgs adicionales al del ME para tener términos de interacción renormalizables en el lagrangiano de Yukawa.

Tabla 4. Contenido de partículas (leptones y Higgses) para el modelo de nuestro interés. La asignación de estos campos a las representaciones irreducibles de S_3 se muestra en la tercera columna. El subíndice I toma valores $I = 1, 2$.

Leptones cargados	Higgses	Representación de S_3
l_{IL}, e_{IR}	ϕ_I	2
l_{3L}, e_{3R}	ϕ	1

En el ME la estructura del lagrangiano de Yukawa L_Y para leptones está dada en (15). Ahora deseamos construir el lagrangiano análogo para el modelo con contenido de partículas mostrado en la tabla 4 y que sea invariante bajo el grupo S_3 con la representación (9). Para obtener tal lagrangiano se consideran todos los posibles acoplamientos de Yukawa que sean renormalizables para estos campos y que den lugar a combinaciones lineales invariantes de sus componentes bajo S_3 . Tales invariantes están dictaminados por los CCG en (12) y (13), los cuales surgen de los productos tensoriales $2 \otimes$



$\mathbf{2}$ y $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ en S_3 , respectivamente. Los acoplamientos a considerar son entonces los que se presentan en la tabla 5.

Tabla 5. Productos de representaciones en S_3 que dan lugar a acoplamientos de Yukawa renormalizables e invariantes bajo $G_{SM} \otimes S_3$. El caso e) es el producto invariante trivial. Los acoplamientos de Yukawa son denotados por $y_i, i = 1, 2, \dots, 5$.

Caso	Producto de representaciones	Acoplamientos de Yukawa
a)	$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$	$y_1(\bar{l}_{iL}\phi_I e_{iR})$
b)	$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{1}$	$y_2(\bar{l}_{iL}\phi_I e_{3R})$
c)	$\mathbf{2} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{2}$	$y_3(\bar{l}_{iL}\phi e_{iR})$
d)	$\mathbf{1} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$	$y_4(\bar{l}_{3L}\phi_I e_{iR})$
e)	$\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$	$y_5(\bar{l}_{3L}\phi e_{3R})$

La asignación de e_{iR} a la representación $\mathbf{2}$ de S_3 que se muestra en la tabla 4 indica que este doblete de S_3 tiene como componentes a e_{1R} y e_{2R} , entonces

$$e_{iR} = \begin{pmatrix} e_{1R} \\ e_{2R} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

mientras que e_{3R} , al ser asignado a la representación $\mathbf{1}$ de S_3 , es un singulete de este grupo. Los campos $e_{iR}, i = 1, 2, 3$, son a la vez singuletes de $SU(2)_L$ del ME.

Otro ejemplo es el doblete de S_3 formado por los campos de Higgs $\phi_I, I = 1, 2$, entonces

$$\phi_I = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son, cada uno, dobletes de $SU(2)_L$ en el grupo del ME. Para los demás campos la asignación a estas dos representaciones de S_3 es análoga. Para ilustrar el uso de los CCG en estas construcciones consideramos, por ejemplo, el término d) $\mathbf{1} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$: $y_4(\bar{l}_{3L}\phi_I e_{iR})$ de la tabla 5. Usando los CCG en (12) se tiene que el acoplamiento invariante bajo S_3 está dado por



$$y_4 \left(\bar{l}_{3L} \otimes \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e_{1R} \\ e_{2R} \end{pmatrix} \right) \rightarrow y_4 \left(\bar{l}_{3L} (\phi_1 e_{2R} + \phi_2 e_{1R}) \right) = y_4 (\bar{l}_{3L} \phi_1 e_{2R} + \bar{l}_{3L} \phi_2 e_{1R}). \quad (21)$$

Como otro ejemplo consideremos el primer término en la tabla 5, es decir, a) $2 \otimes 2 \otimes 2$: $y_1 (\bar{l}_{1L} \phi_1 e_{1R})$. Usando los CCG en (13) se tiene que el término invariante bajo S_3 es

$$y_1 \left(\begin{pmatrix} \bar{l}_{1L} \\ \bar{l}_{2L} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e_{1R} \\ e_{2R} \end{pmatrix} \right) \rightarrow y_1 (\bar{l}_{1L} \phi_1 e_{1R} + \bar{l}_{2L} \phi_2 e_{2R}). \quad (22)$$

Aplicando los CCG (12) y (13) a los demás acoplamientos no triviales de la tabla 5 obtenemos el lagrangiano de Yukawa invariante bajo $G_{ME} \otimes S_3$

$$\begin{aligned} L_Y = & -y_1 (\bar{l}_{2L} \phi_2 e_{2R} + \bar{l}_{1L} \phi_1 e_{1R}) - y_2 (\bar{l}_{1L} \phi_2 e_{3R} + \bar{l}_{2L} \phi_1 e_{3R}) \\ & - y_3 (\bar{l}_{1L} \phi e_{2R} + \bar{l}_{2L} \phi e_{1R}) \quad (23) \\ & - y_4 (\bar{l}_{3L} \phi_1 e_{2R} + \bar{l}_{3L} \phi_2 e_{1R}) - y_5 (\bar{l}_{3L} \phi e_{3R}) + h.c. \end{aligned}$$

Consideramos ahora el mecanismo de Higgs. En este modelo se tiene que los valores de expectación en el vacío (VEV) para los campos de Higgs están dados por Kubo et al. (2003)

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i^+ \\ \phi_i^0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \quad (24)$$

donde $v^2 + v_1^2 + v_2^2 = (246 \text{ GeV})^2$. Substituyendo (24) en (23) obtenemos

$$\begin{aligned} L_Y = & -y_1 (\bar{e}_{2L} v_2 e_{2R} + \bar{e}_{1L} v_1 e_{1R}) - y_2 (\bar{e}_{1L} v_2 e_{3R} + \bar{e}_{2L} v_1 e_{3R}) \\ & - y_3 (\bar{e}_{1L} v e_{2R} + \bar{e}_{2L} v e_{1R}) \quad (25) \end{aligned}$$



$$-y_4(\bar{e}_{3L}v_1e_{2R} + \bar{e}_{3L}v_2e_{1R}) - y_5(\bar{e}_{3L}ve_{3R}) + h.c.$$

donde hemos puesto el factor común $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a 1 por simplicidad. El lagrangiano en (25) puede ser reescrito como

$$L_Y = (\bar{e}_{1L}, \bar{e}_{2L}, \bar{e}_{3L}) \begin{pmatrix} y_1 v_1 & y_3 v & y_2 v_2 \\ y_3 v & y_1 v_2 & y_2 v_1 \\ y_4 v_2 & y_4 v_1 & y_5 v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1R} \\ e_{2R} \\ e_{3R} \end{pmatrix} + h.c. \quad (26)$$

Asumiendo ahora que $v_1 = v_2$ se tiene que la matriz de masa para leptones cargados es

$$M_A = \begin{pmatrix} y_1 v_1 & y_3 v & y_2 v_1 \\ y_3 v & y_1 v_1 & y_2 v_1 \\ y_4 v_1 & y_4 v_1 & y_5 v \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Para reducir el número de parámetros en (27) se considera una simetría discreta Z_2 . A los campos $l_{iL}, e_{iR}, \phi_i, l_{3L}$ y e_{3R} se les asigna la carga +1 bajo Z_2 , mientras que a ϕ se le asigna la carga -1 (Félix et al., 2007; Kubo et al., 2003). Los acoplamientos permitidos son aquellos que son compatibles (invariantes) con la simetría Z_2 . Por ejemplo, el acoplamiento en a) $y_1(\bar{l}_{iL}\phi_l e_{iR})$ de la tabla 5 tiene carga (+1) bajo Z_2 ya que $(+1)(+1)(+1) = +1$, por lo que este término es invariante bajo Z_2 . Por otra parte, el acoplamiento c) $y_3(\bar{l}_{iL}\phi e_{iR})$ de la tabla 5 no es invariante bajo Z_2 pues tiene carga $(+1)(-1)(+1) = -1$. Aplicando este procedimiento a los demás acoplamientos de la tabla 5 se tiene que los términos asociados a y_3 y y_5 no son compatibles con Z_2 , por lo que son removidos del lagrangiano de Yukawa y de la matriz de masa. Esto es equivalente a tomar $y_3 = y_5 = 0$ en (27), por lo que la matriz de masa para leptones cargados es

$$M_A = v_1 \begin{pmatrix} y_1 & 0 & y_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ y_4 & y_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & m_2 \\ 0 & m_1 & m_2 \\ m_4 & m_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Esta matriz tiene 12 parámetros reales provenientes de los acoplamientos de Yukawa y_i , los cuales son complejos en esta parte, y donde hemos tomado en cuenta el número de veces que se repiten. El valor de v_1 está determinado por la escala electrodébil.



Por otra parte, las matrices análogas a (27) y (28) reportadas por Kubo et al. (2003) son

$$M_B = \begin{pmatrix} y_1 v_1 + y_3 v & y_1 v_1 & y_2 v_1 \\ y_1 v_1 & -y_1 v_1 + y_3 v & y_2 v_1 \\ y_4 v_1 & y_4 v_1 & y_5 v \end{pmatrix}, \quad (29)$$

y

$$M_B = v_1 \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 \\ y_1 & -y_1 & y_2 \\ y_4 & y_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_1 & m_2 \\ m_1 & -m_1 & m_2 \\ m_4 & m_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

respectivamente, donde la representación (4) de S_3 fue usada. La matriz en (30) presenta 16 parámetros reales.

5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En el esquema de la figura 1 presentamos las matrices de masa para leptones cargados M_{ME} en (16), M_A en (28) y M_B en (30) para notar el cambio en su estructura causado por el uso de los grupos S_3 y Z_2 . Recordemos que en la construcción M_A y M_B se usaron dos representaciones distintas de dimensión dos para S_3 . Notamos que el número de parámetros reales en las matrices de masa M_A , M_B y M_{ME} son 12, 16 y 18, respectivamente, además de presentar tres, uno y cero elementos de matriz nulos.

$$M_{ME} = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 \otimes Z_2} \begin{cases} M_A = v_1 \begin{pmatrix} y_1 & 0 & y_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ y_4 & y_4 & 0 \end{pmatrix} \\ M_B = v_1 \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 \\ y_1 & -y_1 & y_2 \\ y_4 & y_4 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Figura 1. Esquema que muestra las matrices de masa para los leptones cargados en tres contextos diferentes. La matriz de masa a la izquierda corresponde al caso del ME y fue



presentada en (16). Las matrices en la parte derecha corresponden al caso donde se usaron los grupos S_3 y Z_2 . La matriz M_A (M_B) en la parte superior (inferior) derecha es la matriz (28) ((30)), y está asociada a la representación (9) ((4)) de S_3 . Notamos que el cambio de representación para S_3 modifica su estructura y el número de parámetros reales, como se nota al comparar M_A con M_B .

Los cambios en la estructura de las matrices de masa M_A y M_B son debidos a los CCG ya que estos son dependientes de la base o de la representación de S_3 . Por ejemplo, los CCG para los términos invariantes bajo S_3 que resultan de los productos $2 \otimes 2$ y $2 \otimes 2 \otimes 2$ con la representación (9) de S_3 están dados en (12) y (13), y fueron usados en la construcción de M_A . Por otra parte, para M_B se emplearon los CCG en (7) y (8), asociados a la representación (4) de S_3 .

Los respectivos CCG provocaron que los elementos de matriz con y_3 aparecieran en distintas posiciones en las matrices M_A y M_B . Mientras que en M_A se tienen dos términos con y_3 fuera de la diagonal, en M_B aparecen sumándose a términos con y_1 en la diagonal, como se nota en (27) y (29). El elemento de matriz con y_5 permanece en la misma posición en ambas matrices. Como la simetría Z_2 implica $y_3 = y_5 = 0$, resulta que M_A da lugar a tres elementos nulos mientras que M_B solamente a uno, como se aprecia en (28) y (30). Otro efecto de los CCG es que la matriz M_A presenta dos elementos menos con y_1 que la matriz M_B .

Aunque las representaciones (4) y (9) de S_3 se ven distintas se tiene que son equivalentes ya que están relacionadas por una transformación de similaridad $P^{-1}RP = R'$, donde P es la matriz de cambio de base mostrada en (14), y R (R') denota la representación (4) ((9)) de S_3 . Por lo tanto, un cambio base o de representación de dimensión dos para S_3 sí influye en la estructura y en la reducción del número de parámetros en la matriz de masa para leptones cargados.

5.1 NOTA SOBRE ESTUDIOS FENOMENOLÓGICOS

Para estudiar la fenomenología de los leptones en este tipo de modelos es necesario construir la matriz de mezcla para leptones o matriz PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). Su construcción requiere información del sector de neutrinos, los cuales son leptones sin carga eléctrica (Langacker, 2020; Peskin & Schroeder, 1995). En este trabajo no hemos considerado tal sector porque nuestro objetivo es explorar la influencia del cambio de base o



de representación del grupo S_3 en la estructura de la matriz de masa para leptones cargados, como una aplicación del grupo no Abelianiano S_3 en estas construcciones. Sin embargo, una breve discusión sobre la construcción de la matriz de mezcla y su uso en exploraciones fenomenológicas para leptones se presenta enseguida (Félix et al., 2007; Kubo et al., 2003; Langacker, 2020).

La matriz de mezcla para leptones está definida por

$$U = A_{eL}^\dagger A_{\nu L}, \quad (31)$$

donde A_{eL} y $A_{\nu L}$ son las matrices unitarias usadas en la diagonalización de las matrices de masa para leptones cargados y para neutrinos, respectivamente. La diagonalización de la matriz de masa M para leptones cargados es efectuada por dos transformaciones unitarias A_{eL} y A_{eR} de la siguiente manera

$$A_{eL}^\dagger M A_{eR} = M_d = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau). \quad (32)$$

Para encontrar A_{eL} se construye la matriz hermitiana $N = MM^\dagger$. Usando (32) se tiene que

$$N = A_{eL} N_d A_{eL}^\dagger, \quad (33)$$

donde $N_d = \text{diag}(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2)$. En este desarrollo es necesario expresar a $N = MM^\dagger$ en términos de las masas de los leptones cargados, lo cual requiere otro proceso algebraico. De esta forma A_{eL} se construye básicamente de los eigenvectores de N . Un proceso análogo se efectúa para obtener $A_{\nu L}$ en el sector de neutrinos, el cual presenta detalles adicionales debido a la naturaleza de estas partículas (Langacker, 2020). Para estudios fenomenológicos, como la oscilación de neutrinos, se compara la matriz de mezcla teórica (31) con la matriz de mezcla reportada en PDG (Navas et al., 2024), la cual está parametrizada por tres ángulos de mezcla y una fase de violación CP (conjugación de carga y paridad), asumiendo que los neutrinos son campos de Dirac.



CONCLUSIONES

En este trabajo exploramos la influencia de la representación (9) de dimensión dos del grupo S_3 en la estructura de la matriz de masa para leptones cargados como una aplicación de los grupos discretos no Abelianos en la física de partículas. Para este propósito nos enfocamos al sector de leptones cargados usando como base el modelo presentado por Kubo et al. (2003), donde la representación (4) de S_3 fue usada.

La matriz de masa para leptones cargados que obtuvimos se presenta en (28) y la llamamos M_A . La correspondiente matriz reportada por Kubo et al. (2003) se presenta en (30) y la denotamos por M_B . Encontramos que la representación (9) de S_3 modifica la estructura de la matriz de masa y reduce el número de parámetros reales. Un aspecto crucial de los CCG con la representación (9) es que estos modifican las posiciones y la manera en que los dos elementos de matriz con acoplamiento y_3 aparecen en M_A , dando lugar no solo a un menor número de parámetros, sino también a favorecer la presencia de dos elementos nulos en M_A después de aplicar la simetría Z_2 . Respecto al número de parámetros obtuvimos que nuestra matriz de masa M_A presenta 12 parámetros reales mientras que M_B tiene 16. El origen de estas diferencias en estructura es debido a los CCG ya que estos dependen de la base, y justamente las representaciones (4) y (9) de S_3 están relacionadas por una transformación de similitud, donde la matriz de cambio de base está dada en (14).

Por lo tanto, en el modelo considerado en este trabajo se tiene que la representación (9) de S_3 y los correspondientes CCG tienen el efecto de modificar la estructura y reducir el número de parámetros de la matriz de masa para leptones cargados, en comparación con la correspondiente matriz que se obtiene al usar la representación (4) de S_3 .

PLANES FUTUROS

Un estudio fenomenológico de leptones sería necesario para conocer las implicaciones físicas de nuestra matriz de masa. Para esto sería necesario construir la matriz de mezcla (31), lo cual requiere incluir el sector de neutrinos en el análisis. Tales estudios fenomenológicos podrían formar parte de un trabajo futuro.

REFERENCIAS

- Arriaga-Osante, C., Chen, M., Díaz-Castro, R., Li, X., Liu, X., Ramos-Sánchez, S., & Ratz, M. (2025). Multiple realizations of modular flavor symmetries and their phenomenology. *Journal of High Energy Physics*, 2025(6): 96. [https://doi.org/10.1007/jhep06\(2025\)096](https://doi.org/10.1007/jhep06(2025)096)
- Baur, A., Nilles, H. P., Trautner, A., & Vaudrevange, P. K. (2019). Unification of flavor, CP, and modular symmetries. *Physics Letters B*, 795: 7–14. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.066>
- Barman, A., Francis, N. K., & Bora, H. (2024). Neutrino mixing phenomenology: A4 discrete flavor symmetry with type-I seesaw mechanism. *Modern Physics Letters A*, 39(07): 2350200. <https://doi.org/10.1142/s0217732323502000>
- Canales, F. G., Mondragón, A., & Mondragón, M. (2012). The S3 flavour symmetry: Neutrino masses and mixings. *Fortschritte Der Physik*, 61(4-5): 546-570. <https://doi.org/10.1002/prop.201200121>
- Carballo-Pérez, B., Peinado, E., & Ramos-Sánchez, S. (2016). $\Delta(54)$ flavor phenomenology and strings. *Journal of High Energy Physics*, 2016(12): 131. [https://doi.org/10.1007/jhep12\(2016\)131](https://doi.org/10.1007/jhep12(2016)131)
- Chamoun, N., & Lashin, E. I. (2025). Textures of neutrino mass matrix from S4 flavor symmetry. *Journal of High Energy Physics*, 2025(1): 16. [https://doi.org/10.1007/jhep01\(2025\)016](https://doi.org/10.1007/jhep01(2025)016)
- Das, D., & Pal, P. B. (2018). S3 flavored left-right symmetric model of quarks. *Physical Review D*, 98(11): 115001. <https://doi.org/10.1103/physrevd.98.115001>
- Ding, G., & King, S. F. (2024). Neutrino mass and mixing with modular symmetry. *Reports On Progress In Physics*, 87(8): 084201. <https://doi.org/10.1088/1361-6633/ad52a3>
- Ding, G., & Valle, J. W. (2025). The symmetry approach to quark and lepton masses and mixing. *Physics Reports*, 1109: 1–105. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2024.12.005>
- Escobar, J. A., & Luhn, C. (2009). The flavor group $\Delta(6n^2)$. *Journal of Mathematical Physics*, 50(1): 013524. <https://doi.org/10.1063/1.3046563>
- Félix, O., Mondragón, A., Mondragón, M., & Peinado, E. (2007). Neutrino masses and mixings in a minimal S3 invariant extension of the standard model. *AIP Conference Proceedings*, 917(1): 383-389. <https://doi.org/10.1063/1.2751980>

- Feruglio, F. (2018). Are neutrino masses modular forms? *WORLD SCIENTIFIC EBooks*, 227–266. https://doi.org/10.1142/9789813238053_0012
- Georgi, H. (1999). *Lie algebras in particle physics*. CRC Press.
- Grossman, Y. (2010). Introduction to flavor physics. *arXiv (Cornell University)*, 73–106. <https://doi.org/10.5170/cern-2010-002.111>
- Hernández, A. E. C., Long, H. N., Mora-Urrutia, M. L., Thao, N. H., & Vien, V. V. (2022). Fermion masses and mixings and g-2 muon anomaly in a 3-3-1 model with D4 family symmetry. *The European Physical Journal C*, 82(8): 769. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10639-9>
- Ishimori, H., Kobayashi, T., Ohki, H., Omura, Y., Takahashi, R., & Tanimoto, M. (2008). D4 flavor symmetry for neutrino masses and mixing. *Physics Letters B*, 662(2): 178–184. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.03.007>
- Ishimori, H., Kobayashi, T., Ohki, H., Shimizu, Y., Okada, H., & Tanimoto, M. (2010). Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics. *Progress Of Theoretical Physics Supplement*, 183: 1-163. <https://doi.org/10.1143/ptps.183.1>
- Kubo, J., Mondragón, A., Mondragón, M., & Rodríguez-Jáuregui, E. (2003). The flavor symmetry. *Progress Of Theoretical Physics*, 109(5): 795-807. <https://doi.org/10.1143/ptp.109.795>
- Langacker, P. (2020). *The standard model & beyond* (2nd ed.). CRC Press.
- Mondragón, A., Mondragón, M., & Peinado, E. (2007). Lepton masses, mixings, and flavor-changing neutral currents in a minimal S3 invariant extension of the standard model. *Physical Review. D.*, 76(7): 076003. <https://doi.org/10.1103/physrevd.76.076003>
- Meloni, D. (2012). S3 as a flavour symmetry for quarks and leptons after the Daya Bay result on θ_{13} . *Journal of High Energy Physics*, 2012(5): 124. [https://doi.org/10.1007/jhep05\(2012\)124](https://doi.org/10.1007/jhep05(2012)124)
- Navas, S., Amsler, C., Gutsche, T., Hanhart, C., Hernández-Rey, J. J., Lourenço, C., Masoni, A., Mikhasenko, M., Mitchell, R. E., Patrignani, C., Schwanda, C., Spanier, S., Venanzoni, G., Yuan, C. Z., Agashe, K., Aielli, G., Allanach, B. C., Alvarez-Muñiz, J., Antonelli, M., . . . Zheng, W. (2024). Review of Particle Physics. *Physical Review. D.*, 110(3): 030001. <https://doi.org/10.1103/physrevd.110.030001>
- Nilles, H. P., y Ramos-Sánchez, S. (2024). The flavor puzzle: Textures and symmetries. *International Journal Of Modern Physics A*, 39(09n10): 2441003. <https://doi.org/10.1142/s0217751x24410033>
- Nilles, H. P., Ramos-Sánchez, S., & Vaudrevange, P. K. S. (2020). Eclectic flavor groups. *Journal of High Energy Physics*, 2020(2): 45. [https://doi.org/10.1007/jhep02\(2020\)045](https://doi.org/10.1007/jhep02(2020)045)

Peskin, M. E., & Schroeder, D. V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press.

Pérez-Martínez, R. (2024). S3 y S4: representaciones y coeficientes de Clebsch-Gordan. *Abstraction and Application*, 46: 73-86.
<https://intranet.matematicas.uady.mx/journal/>

Ramond, P. (2010). *Group theory: A Physicist's Survey*. Cambridge University Press.

Tong, D. (s. f.). Lectures on the Standard Model.
<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/standardmodel.html>

Tung, W.-K. (1985). *Group theory in physics*. World Scientific Company.

Zupan, J. (2019). Introduction to flavour physics. *CERN Yellow Reports: School Proceedings*, 6: 181-212. <https://doi.org/10.23730/cyrsp-2019-006.181>